PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 10 — 15. Mai 1939 — Redaktionsschluß für Nr. 12 am 1. Juni 1939 — 40. Jahrgang

INHALT:

Abhandlungen:

A. Schulze, Untersuchungen an dem Widerstandswerkstoff Novokonstant. S. 357.

W. Fritz und H. Diemke, Beitrag zur Wärmeleitfähigkeit von natürlicher Steinkohle und von Koks. S. 361.

P. O. Müller, Über die Eigenschwingungen der zylindrischen und sphärischen Welt. S. 366.

O. Reinkober, Die Elastizitätseigenschaften von dünnen Quarzfäden. S. 385.

W. Reichelt, Über eine die Glühkathodenstrahlemission begleitende Materiestrahlung. S. 387.

Besprechungen:

Kodak, Abridged Scientific Publications from the Kodak Research Laboratories. S. 388.

Nachtrag zum Vorlesungsverzeichnis für das Sommerhalbjahr 1939. S. 388.

Nachrichten. S. 388.

ABHANDLUNGEN

Untersuchungen an dem Widerstandswerkstoff Novokonstant

Von A. Schulze

Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt

In jüngster Zeit ist die Frage nach geeigneten Widerstandswerkstoffen, sowohl für technische Widerstände als auch für Präzisionswiderstände (Normalwiderstände) in erheblichem Maße in den Vordergrund getreten. Dies hängt zunächst mit den höheren Anforderungen zusammen, die an derartige Werkstoffe gestellt werden, und außerdem sind auch auf diesem Gebiete bereits Bestrebungen erkennbar, die Zusammensetzung der Werkstoffe so zu wählen, wie es mit den Forderungen des Vierjahresplanes in Einklang steht.

Bei der Auswahl von Widerstandswerkstoffen für Normalwiderstände sind vor allem die großen Ansprüche maßgebend, die an derartige Präzisionswiderstände gestellt werden und die in letzter Zeit noch erheblich gewachsen sind. So konnte das Manganin, das von Anfang an für diese Zwecke als Widerstandswerkstoff verwendet worden ist, durch besondere thermische Behandlung verbessert werden[1]). Weiterhin sei erinnert an Untersuchungen einer aluminiumhaltigen Kupfer-Mangan-Legierung, des Isabellins[2]), das ebenfalls die günstigen Vorbedingungen für eine Verwendung zu Präzisionswiderständen besitzt. Nicht zu vergessen sind in diesem Zusammenhange die Gold-Chrom-Legierungen[3]), über deren Verhalten demnächst berichtet werden soll.

In der vorliegenden Arbeit handelt es sich um Untersuchungen an einem neuen Werkstoff, dem „Novokonstant". Dieser wird von den Vereinigten Deutschen Metallwerken A.G. (Zweigniederlassung Basse und Selve) in Altena in Westfalen in den Handel gebracht und soll für die Herstellung von elektrischen Widerständen Verwendung finden. Das Novokonstant ist ebenfalls eine Kupfer-Mangan-Legierung und enthält 82,5 Proz. *Cu*; 4 Proz. *Al*; 1,5 Proz. *Fe* und 12 Proz. *Mn*. Das gesamte elektrische Verhalten, über das im folgenden berichtet werden soll, läßt diesen Werkstoff für Präzisionswiderstände als geeignet erscheinen.

1. Die Widerstandstemperaturkurve des Novokonstants

Der Verlauf der Widerstandstemperaturkurve des Novokonstants ist dem des Manganins sehr ähnlich; er ist in dem Temperaturgebiet von $-200°$ bis $+300°$ C an Proben, die bei 440° C getempert waren, bestimmt worden. Wie aus der Abb. 1 (Kurve a) zu ersehen ist, hat die Kurve bei etwa 20° C ein Maximum und fällt nach tiefen Temperaturen hin steiler ab als nach den hohen. Bei 150° ist in der Kurve ein Wendepunkt vorhanden — der Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstandes erreicht hier also seinen Mindestwert (s. Kurve b in der Abb. 1) — und oberhalb 225° C beginnt der Widerstand wieder zuzunehmen. Oberhalb 300° tritt bereits eine merkliche Verdampfung des Mangans aus der Drahtoberfläche ein. Man sieht, daß auch beim Novokonstant die Widerstandskurve einen S-förmigen Verlauf hat, wie er im allgemeinen bei den Kupfer-Mangan-Legierungen gefunden wird[1]).

1) A. Schulze, Physik. Zeitschr. **38**, 598, 1937; **39**, 300, 1938.

2) A. Schulze, Physik. Zeitschr. **39**, 401, 1938.

3) A. Schulze, Tätigkeitsbericht der PTR, Physik. Zeitschr. **38**, 240, 1937.

1) A. Schulze, Metallwirtsch. **18**, 35, 1939.

Die Lage des Maximums in der Widerstandstemperaturkurve hängt nun in hohem Maße von der thermischen Vorbehandlung ab. Dies ist

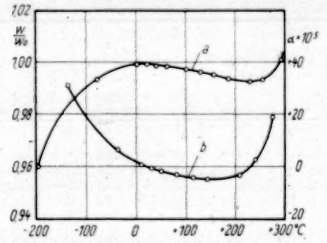


Abb. 1. Abhängigkeit des elektrischen Widerstandes von Novokonstant (Kurve a) und seines Temperaturkoeffizienten (Kurve b) von der Temperatur.

deutlich aus der Abb. 2 zu ersehen. Hier wurden Novokonstantdrähte von 1 mm Durchmesser (11 Ω-Widerstände) verwendet, die auf mit Gewinde versehenen Porzellanrollen gewickelt waren. Die Widerstandstemperaturkurve wurde zunächst an Proben in der Umgebung der Raumtemperatur bestimmt, die sich in dem Ausgangszustand (Kurve a), d. h. in dem Zustand der Kaltverformung befanden; dann wurden die entsprechenden Kurven aufgenommen, nachdem der Novokonstantdraht sukzessive einige Stunden bei 125°, 250°, 400° und 540° C in neutraler Atmosphäre getempert und anschließend langsam bis auf Raumtemperatur abgekühlt war. Vor der Messung wurden die Drähte mit verdünnter Salpetersäure (50–70 Proz. Säurekonzentration) gebeizt, da wegen der in den höheren Temperaturen auftretenden Verdampfung des Mangans die Drahtoberfläche manganärmer geworden ist.

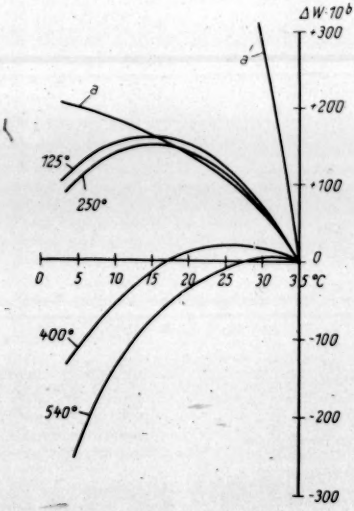


Abb. 2. Abhängigkeit der Widerstandstemperaturkurven des Novokonstants von der Alterungstemperatur.

Aus der Abb. 2 ergibt sich nun, daß bei der Widerstandskurve eines kaltverformten Novokonstantdrahtes das Maximum erheblich unterhalb der Raumtemperatur liegt und daß es sich mit zunehmender Alterungstemperatur zu höheren Temperaturen verschiebt. Wenn Novokonstant mithin bei etwa 400° C gealtert wird, erhält man eine Widerstandstemperaturkurve, deren Maximum in der Nähe der Raumtemperatur liegt. Man hat es hiernach ohne weiteres in der Hand, das Maximum der Widerstandskurve durch Tempern so zu legen, wie man es haben will, was für die Verwendung zu Normalwiderständen von großer Wichtigkeit ist.

Die Kurve a′ in der Abb. 2 ist die Ausgangskurve eines 0,4 mm starken Novokonstantdrahtes, der naturgemäß sehr viel stärker verformt ist als ein 1 mm starker Draht. Seine Widerstandsänderung pro Grad α′ zwischen 15 und 25° C, d. h.

$$\alpha' = \frac{W_{25} - W_{15}}{25 - 15},$$

hat demzufolge auch den relativ hohen Betrag von $-44 \cdot 10^{-6}$, während sie bei dem 1 mm dicken Draht nur noch $-6{,}5 \cdot 10^{-6}$ beträgt.

Auf Grund der obigen Versuche ist es somit auf verhältnismäßig einfache Weise möglich, Widerstandstemperaturkoeffizienten von nur wenigen Millionteln zu erhalten, wie sie jetzt von Präzisionswiderständen gefordert werden. Bei Verwendung eines 1 mm dicken Novokonstantdrahtes wird dies durch eine einmalige Glühung von etwa 5–10 Stunden bei 400° C und bei Verwendung eines 0,4 mm dicken Drahtes durch eine einmalige Glühung von etwa 15–20 Stunden bei 400° C in neutraler Atmosphäre (Argon oder Stickstoff) mit darauffolgender langsamer Abkühlung bis auf Raumtemperatur erreicht. Abätzen der Drahtoberfläche ist selbstverständlich aus dem oben angegebenen Grunde erforderlich. Aus Abb. 3 ist der Einfluß des Temperns bei 400° C nach verschiedenen Glühzeiten zu erkennen.

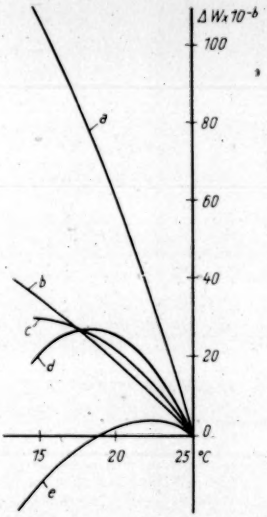


Abb. 3. Abhängigkeit der Widerstandstemperaturkurve von der Alterungszeit bei 400° C.

Kurve a: nach 5 Stunden, Kurve b: nach 10½ Stunden, Kurve c: nach 12 Stunden, Kurve d: nach 14½ Stunden. Kurve e: anschließend 4 Stunden bei 440° C.

Der spezifische Widerstand des Novokonstants, der an einigen Proben bestimmt worden ist, beträgt bei Raumtemperatur:

im harten (kaltverformten) Zustande:

0,51 bis 0,52 Ω mm²/m,

nach 20stündigem Tempern bei 400° C:

0,45 Ω mm²/m.

2. Das thermoelektrische Verhalten des Novokonstants

Bei der Verwendung eines Widerstandswerkstoffes für Präzisionswiderstände ist sein thermoelektrisches Verhalten von gewisser Bedeutung, da seine Thermokraft gegen Kupfer klein sein soll. Novokonstant verhält sich in dieser Beziehung sehr günstig. Seine Thermokraft wurde zunächst im kaltverformten und dann in getempertem Zustande (4 Stunden bei 440° C) gegen geglühtes Kupfer zwischen 0 und 40° C gemessen; hierbei ergab sich, daß im ersten Fall die Thermokraft pro Grad:

$$\frac{dE}{dt} = +0{,}3 \frac{\text{Mikrovolt}}{\text{Grad}}$$

betrug, während im zweiten Fall:

$$\frac{dE}{dt} = -0{,}3 \frac{\text{Mikrovolt}}{\text{Grad}}$$

gefunden wurde. Man sieht daraus, daß die Thermokraft des Novokonstants gegen Kupfer außerordentlich kleinist. Durch das Tempern wird der Richtungssinn der Thermokraft umgedreht.

Getempertes, weiches Novokonstant ist somit thermoelektrisch negativ gegen Kupfer, d. h. der Strom fließt an der heißen Lötstelle vom Kupfer zum Novokonstant. In Abb. 4 ist der Verlauf der Thermokraftkurve des getemperten Novokonstants gegen Kupfer in dem Temperaturbereich zwischen 0 und 400° C dargestellt. Er ist ähnlich dem Verlauf, wie er bei anderen Kupfer-Mangan-Legierungen gefunden wurde.

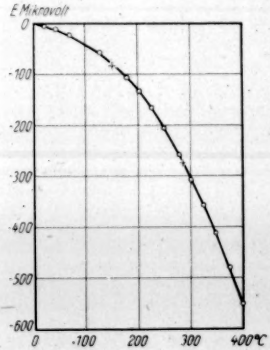


Abb. 4. Die thermoelektrische Kraft von Novokonstant gegen Kupfer in Abhängigkeit von der Temperatur;
○ bei steigender Temperatur beobachtet,
+ bei fallender Temperatur beobachtet.

3. Das mechanische Verhalten des Novokonstants

Von den mechanischen Eigenschaften des Novokonstants wurden die Zerreißfestigkeit und die Dehnung an 1 mm dicken Drähten gemessen. In kaltverformtem Zustande beträgt die Zerreißfestigkeit 55 kg/mm² bei einer Dehnung von 28 Proz. Abb. 5 zeigt ihre Abhängigkeit von der Alterungstemperatur; hierbei waren die Drähte je 5 Stunden sukzessive bei 250°, 350°, 400°,

475° und 550° C in neutraler Atmosphäre gealtert und anschließend langsam bis auf Raumtemperatur abgekühlt. Die Kurven der Zerreißfestigkeit und der Dehnung zeigen einen sehr

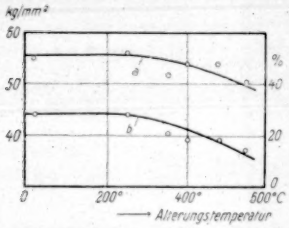


Abb. 5. Zerreißfestigkeit (Kurve a) und Dehnung (Kurve b) von Novokonstant bei Raumtemperatur in Abhängigkeit von der Alterungstemperatur.

ähnlichen Verlauf. Nach Alterung bei 550° ist hiernach die Zerreißfestigkeit auf 50 kg/mm² bei einer Dehnung von etwa 15 Proz. gesunken.

4. Die Herstellung und die zeitliche Konstanz von Novokonstantwiderständen

Die obigen Untersuchungen zeigen, daß das Novokonstant alle Vorbedingungen erfüllt, die für eine Verwendung dieses Werkstoffes zu Präzisionswiderständen erforderlich sind. Es wurden daher einige Widerstände hergestellt, bei denen — in derselben Weise wie Manganinwiderständen (l. c.) — der Widerstandsdraht bifilar auf ein mit Gewinde versehenes Porzellanrohr gewickelt war. Nach einer Glühung von 5—20 Stunden bei etwa 400° C (je nach der Drahtdicke — vgl. oben —) in neutraler Atmosphäre mit darauffolgender langsamer Abkühlung bis auf Raumtemperatur wurde die Drahtoberfläche abgeätzt. Die Widerstände wurden nunmehr abgeglichen und anschließend mit einer sehr dünnen Schicht aus Bakelitlack bestrichen, um sie vor Oxydation zu schützen; zum Schluß wurden sie noch etwa 2 Stunden auf 50—60° C angelassen. Die Enden des Novokonstantdrahtes waren an Kupferringen hart angelötet, und letztere waren durch Verschraubung und Weichlötung mit den inneren Enden der Kupferbügel verbunden. Aus Abb. 6 ist ein auf diese Weise hergestellter Novokonstantwiderstand (Sollwert 10 Ω) zu ersehen.

Verschiedene Novokonstantwiderstände von 1 Ω (Drahtstärke 1 mm) und 10 Ω (Drahtstärke 0,4 mm) wurden nun auf ihre zeitliche Konstanz hin untersucht. Während einige von ihnen immerhin etwa 6 Monate brauchten, bis ihre Widerstandswerte konstant wurden, haben andere sofort nach der Fertigstellung Widerstandswerte ergeben, die innerhalb einiger Milliontel konstant geblieben sind. Die anfänglichen, länger andauernden Änderungen sind sehr wahrscheinlich auf gröbere chemische Inhomogenität innerhalb

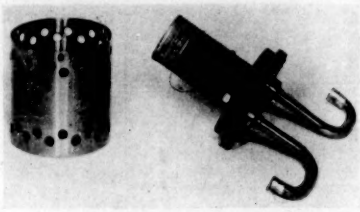


Abb. 6. Ein 10 Ω-Novokonstant-Widerstand.

des Widerstandswerkstoffes zurückzuführen, die durch ein kurzfristiges Glühen ohne weiteres nicht zu beseitigen sind.

In der folgenden Zahlentafel I ist die zeitliche Abhängigkeit der Widerstände *No* 1_4 und *No* 10_4 wiedergegeben. Der Widerstandsverlauf des Novokonstantwiderstandes *No* 1_4 ist in Abb. 7 dargestellt. Die in der Zahlentafel I angegebenen α- und β-Werte sind unter Zugrundelegung der quadratischen Gleichung:

$$W_t = W_{20} \cdot [1 + \alpha(t - 20) + \beta(t - 20)^2]$$

berechnet.

Zahlentafel I

Widerstandswerte der Novokonstantwiderstände (in Ohm) in ihrer zeitlichen Abhängigkeit

Datum	*No* 1_4 $\alpha = +2{,}59 \cdot 10^{-6}$ $\beta = -0{,}37 \cdot 10^{-6}$	Datum	*No* 10_4 $\alpha = -1{,}60 \cdot 10^{-6}$ $\beta = -0{,}35 \cdot 10^{-6}$
1938		1938	
27. April.	0,999887	14. Juli . .	10,00058
10. Mai . .	0,999887	12. Aug. .	10,00067
25. Mai . .	0,999883	27. Sept. .	10,00063
10. Juni .	0,999885	24. Nov. .	10,00061
15. Juli . .	0,999884	1939	
2. Aug. .	0,999889		
28. Sept. .	0,999884	31. Jan. .	10,00063
26. Nov. .	0,999885	16. März .	10,00064
1939			
27. Jan. .	0,999881		
16. März .	0,999884		

Wie man sieht, besitzen die Novokonstantwiderstände sehr kleine Temperaturkoeffizienten. Ihre zeitliche Konstanz zeigt nach den bisherigen

Beobachtungen ein durchaus günstiges Verhalten. Es wird abzuwarten sein, ob dies auch in der Zukunft erhalten bleibt.

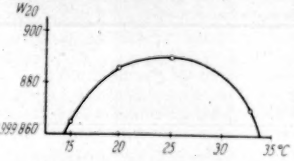


Abb. 7. Widerstandstemperaturkurve des Novokonstantwiderstands No I_4.

Zusammenfassung

An dem Widerstandswerkstoff Novokonstant, einer *Al* und *Fe* enthaltenden Kupfer-Mangan-Legierung wurden der elektrische Widerstand und die Thermokraft gegen Kupfer in dem Temperaturbereich von — 200 bis + 300° C untersucht.

Die Widerstandstemperaturkurve hat einen S-förmigen Verlauf. In der Umgebung der Raumtemperatur ist er in starkem Maße von der thermischen Behandlung abhängig; und zwar verschiebt sich das Widerstandsmaximum mit zunehmender Alterungstemperatur zu höheren Temperaturen, wobei zugleich auch eine Verringerung des Temperaturkoeffizienten eintritt. Das Optimum wird durch Alterung des Novokonstants bei etwa 400° C erreicht; hierbei ergibt sich ein Temperaturkoeffizient von nur wenigen Millionteln.

Der spezifische Widerstand von weichem Novokonstant beträgt bei Raumtemperatur: 0,45 Ω mm²/m.

Die Thermokraft gegen Kupfer ist in der Umgebung der Raumtemperatur kleiner als ein Mikrovolt pro Grad.

Von den mechanischen Eigenschaften wurden die Zerreißfestigkeit und die Dehnung nach verschiedener thermischer Behandlung bestimmt.

Die obigen Untersuchungen haben ergeben, daß das Novokonstant zur Herstellung von Normalwiderständen geeignet erscheint, worauf auch die im Anfang bereits beobachtete zeitliche Konstanz der Widerstandswerte schließen läßt.

Berlin-Charlottenburg, im März 1939.

(Eingegangen 3. April 1939)

Beitrag zur Wärmeleitfähigkeit von natürlicher Steinkohle und von Koks[1])

Von W. Fritz und H. Diemke

Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt

Die vorliegende Untersuchung der Wärmeleitfähigkeit deutscher Rohkohle wurde an der Reichsanstalt mit Unterstützung und in Zusammenarbeit mit dem Reichskohlenrat durchgeführt. Veranlaßt wurde sie einmal durch die Feststellung, daß über die Wärmeleitzahl natürlicher Kohle so gut wie nichts oder nur sehr widersprechende Angaben bekannt sind, und zweitens durch das Bedürfnis, diese Größe für die Berechnung der Vorgänge beim Schwelen oder Verbrennen von Kohleteilchen sicher zu kennen[2]). Im ganzen wurden 35 verschiedene Kohleproben aus verschiedenen deutschen Zechen und Revieren untersucht. Für die Beschaffung größerer Kohlestücke und der chemischen Analysen (Immediatanalysen) sorgte der Reichskohlenrat. Wir haben Herrn Dr.-Ing. Schwartzkopff vom Reichskohlenrat für seine freundliche und immer bereite Unterstützung sehr zu danken.

Die Herstellung der Versuchsproben: Zylindrische Scheiben von 100 mm Durchmesser und 15–20 mm Dicke war oft recht schwierig, da wir an die Güte der Platten hohe Ansprüche stellen mußten. Ein Teil dieser Scheiben wurde in entgegenkommender Weise in der Kohleabteilung der Siemens-Plania-Werke Berlin-Lichtenberg, ein Teil im Institut für Aufbereitung an der Technischen Hochschule Berlin-Charlottenburg hergestellt, die restliche mechanische Bearbeitung wurde in der Reichsanstalt erledigt. Sämtlichen beteiligten Stellen, einschließlich der die Kohle liefernden Zechen, danken wir hiermit bestens.

I. Versuchsverfahren und Versuchsanordnung

Wir benutzten zwei Meßverfahren, ein absolutes und ein relatives.

a) Das absolute Verfahren

Bei diesem stationären „Einplattenverfahren" Prüfverfahren der Reichsanstalt zur Bestim-

1) Der vorliegende Beitrag enthält eine Zusammenfassung der wesentlichen Gesichtspunkte bei der experimentellen Ausführung der Versuche und einen Überblick über die Versuchsergebnisse; alle Einzelheiten und die ausführlichen Versuchsdaten und -ergebnisse werden gleichzeitig in der Zeitschrift „Feuerungstechnik" veröffentlicht.

2) Herr Dr.-Ing. W. Gumz, Schriftleiter der Zeitschrift „Feuerungstechnik", hat uns von der verbrennungstechnischen Seite her zu der Untersuchung angeregt, wofür wir ihm hiermit danken.

mung der Wärmeleitfähigkeit schlecht leitender fester Stoffe bei Temperaturen zwischen 0 und 100° C[1]] wird die Wärme in einem elektrischen Heizkörper *a* (Abb. 1) erzeugt und strömt senkrecht durch die Prüfplatte *b* von 100 mm Durch-

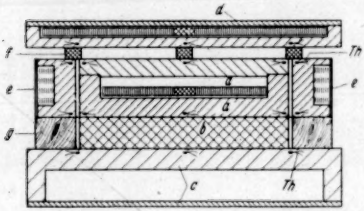


Abb. 1. Versuchsanordnung beim absoluten Verfahren (Fußnote 1 S. 361). *a* elektrischer Heizkörper, *b* Versuchs- (Prüf-) Platte, *c* Kühlkörper, *d* Platten- (Deckel-) Heizkörper, *e* Schutzringheizkörper, *f* Distanzplättchen aus Glas, *g* Holzring (seitliche Isolation), *Th* Thermoelemente.

messer und 15–20 mm Dicke an einen Kühlkörper *c*, der mit Wasser aus einem Höppler-Thermostaten gespeist wird. Die Versuchsplatte *b* ist an ihren ebenen Stirnflächen an den Kupferheizkörper *a* und den Kühlkörper *c* mit Paraffin aufgekittet. Die Temperaturen werden nicht in der Platte *b*, sondern in Bohrungen in den anliegenden Metallkörpern nahe der Oberfläche gemessen.

Alle Wärmeverluste des Heizkörpers *a* nach oben und radial nach außen können mit Hilfe des Plattenheizkörpers *d* und des Schutzringheizkörpers *e* praktisch gleich Null gemacht werden; die restlichen Korrektionen überschreiten bei unseren Versuchen nie den Betrag von 1 Proz. der Heizleistung. Die Temperaturen wurden an 16 Stellen mit Thermoelementen gemessen. Die Fehlergrenze für die mit dieser Einrichtung gemessenen Werte der Wärmeleitfähigkeit beträgt ± 1 Proz.

b) Das Relativverfahren

Wir wählten das übliche Plattenvergleichsverfahren in der Form, in der es an der Reichsanstalt von Erk, Keller und Poltz[2]) für 3–4 mm dicke Scheiben ausgebildet worden ist. Da die Kohleplatten, die wir zu untersuchen hatten, aber 15–20 mm dick waren, mußten wir zuerst nachprüfen, ob das Verfahren auch in diesem Fall geeignet war.

Beim Versuch strömt die Wärme von einem mit heißem Wasser aus einem Höppler-Thermostaten durchflossenen Aluminiumzylinder *1* durch folgende hintereinander geschaltete zylindrische Scheiben gleichen Durchmessers (100 mm); Abb. 2: die Kupferplatte *2* mit sauber geschliffenen Flächen, die Versuchsplatte *3*, die Kupferscheibe *4* von 3 mm Dicke, die Vergleichskohleplatte *5*, die Kupferscheibe *6* von 10 mm Dicke wie *2*. Schließlich wird der Wärmestrom wieder durch einen Aluminiumzylinder *7* abgeleitet, welcher von kälterem Wasser aus einem zweiten Höppler-Thermostaten durchflossen wird. Die Anordnung ist nach außen isoliert. Die Temperaturen werden mit Thermoelementen gemessen, die in Bohrungen nahe an der Oberfläche

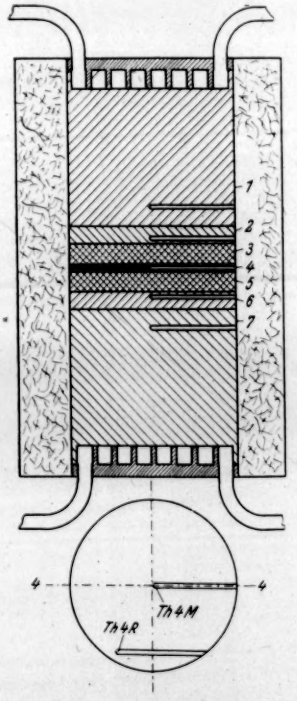


Abb. 2. Versuchsanordnung beim relativen Verfahren. *1*, *7* Aluminiumzylinder, *2*, *6* Kupferplatten, *3* Versuchsplatte, *4* Kupferzwischenplatte, *5* Vergleichsplatte, *Th 4 M* und *Th 4 R* Thermoelemente in der Zwischenplatte *4*.

1) M. Jakob, Zeitschr. f. techn. Phys. **7**, 475, 1926.

2) S. Erk, A. Keller und H. Poltz, Physik. Zeitschr. **38**, 394, 1937.

stecken, und zwar in beiden Zylindern *1* und *7* und in den Kupferplatten *2*, *4* und *6*. In der Kupferplatte *4* liegen zwei Thermoelemente, eins in der Mitte (*Th 4 M*) und eins am Rand (*Th 4 R*).

Um einen guten Kontakt (ohne Luftschichten) zwischen der Kohleplatte und den Kupferscheiben zu sichern, wurden die Kohlescheiben auf ihren Planseiten jeweils mit einer Paraffinschicht überzogen, welche so schnell warm aufzubringen war, daß einerseits das Paraffin fest haftete und andererseits nichts von der Kohle aufgesogen werden konnte. Diese Paraffinschichten wurden danach auf der Drehbank bis auf etwa 0,1 mm Stärke abgedreht. Die Korrektur infolge des zusätzlichen Temperaturgefälles in der Paraffinschicht ist sehr klein, da die Wärmeleitzahlen von Kohle und Paraffin nahezu gleich sind. Bei den Messungen mit dem absoluten Gerät (Abschnitt I a) wurde nun die Kohlenplatte unmittelbar durch vorsichtiges Erwärmen mit dieser Paraffinschicht an den Kühl- und den Heizkörper aufgekittet; bei dem relativen Verfahren brachte man auf die Paraffinschicht jeweils bis vier Tropfen Öl als dünne Haftzwischenschicht auf; Kohlescheibe und Kupferplatte konnten danach (ohne Luftschicht) aufeinander geschoben und zusammengepreßt werden.

II. Versuchsauswertung beim Relativverfahren

Es sei zunächst angenommen, daß der Wärmefluß Q_0 (kcal/h) vollkommen verlustfrei durch die Versuchsanordnung ströme. Bezeichnet man dann mit λ_n, $(\Delta t)_n$, δ_n und F_n die Wärmeleitfähigkeit (kcal/m h Grad), den Temperaturunterschied (° C), die Dicke (m) und die Fläche (m²) der Vergleichskohlenplatte und mit λ, Δt, δ und F die entsprechenden Größen der zu prüfenden Versuchsplatte ($F \approx F_n$), ferner mit λ_P, δ_P bzw. $\lambda_{Öl}$, $\delta_{Öl}$ Wärmeleitzahl und Dicke der Paraffinschicht bzw. Ölschicht, so gilt (Abb. 2):

$$\left.\begin{aligned}(\Delta t)'_n &= t_4 - t_6\\ \Delta t' &= t_2 - t_4\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$(\Delta t)_n = (\Delta t)'_n \cdot \frac{1}{1 + \frac{\lambda_n}{\delta_n}\left(\frac{\delta_P}{\lambda_P} + \frac{\delta_{Öl}}{\lambda_{Öl}}\right)_n} \cdot \quad (2)$$

Der Wärmestrom Q_0 wäre somit, da λ bekannt ist:

$$Q_0 = \lambda_n \frac{F_n}{\delta_n} \cdot (\Delta t)_n \,. \quad (3)$$

Für die Versuchsplatte gilt entsprechend

$$\Delta t = \Delta t' - \frac{Q_0}{F}\left(\frac{\delta_P}{\lambda_P} + \frac{\delta_{Öl}}{\lambda_{Öl}}\right) \quad (4)$$

und mit Gleichung (3) und (4)

$$\lambda_{red} = \frac{\delta}{F \cdot \Delta t} \cdot Q_0 \,. \quad (5)$$

Die Korrektionsglieder in Gleichung (2) und (4) sind von kleinem Betrag, so daß der Unterschied zwischen den gemessenen Größen $(\Delta t)'_n$ bzw. $\Delta t'$ und den korrigierten $(\Delta t)_n$ bzw. Δt in keinem Fall größer ist als 2 Proz. der Meßwerte. Bei 30° C war $\lambda_P = 0{,}21$ kcal/m h Grad; $\lambda_{Öl} = 0{,}124$ kcal/m h Grad.

λ_{red} wäre die richtige Wärmeleitzahl, wenn die Versuchsanordnung keine Wärmeverluste nach außen hätte (Q_0 = konst). Die in Wirklichkeit auftretenden Wärmeverluste durch die Mantelfläche der Platten berücksichtigen wir durch einen Korrektionsfaktor k:

$$\lambda = k \cdot \lambda_{red} \,. \quad (6)$$

Der Faktor k wird gesondert experimentell bestimmt.

III. Wärmeleitzahl der Vergleichskohleplatte und Bestimmung des Faktors k in Gleichung (6)

Als Vergleichskohle wurde eine von der Zeche Lohberg der Gelsenkirchener Bergwerks AG. kommende „Kannelkohle" benutzt, welche besonders homogen war. Die Wärmeleitzahl dieser Vergleichskohle wurde nach dem Absolutverfahren an zwei Platten von 14 und 20 mm Dicke gemessen; das Ergebnis ist in Abb. 3 ent-

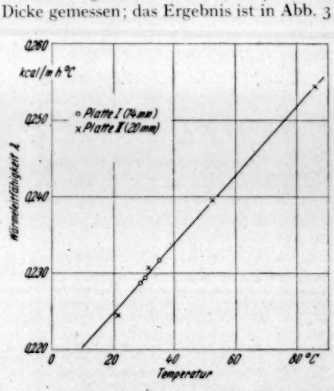


Abb. 3. Wärmeleitfähigkeit der Kannelkohle.

halten (Meßgenauigkeit größer als ±1 Proz.). Aus Abb. 3 folgt für diese Kohle im Versuchsbereich

für 20° C: $\lambda = 0{,}225$ kcal/m h Grad,
für t° C: $\lambda_t = 0{,}225\,[1 + 0{,}002\,(t - 20)]$.

Von den beiden untersuchten Platten diente die dünnere (14 mm) als Vergleichsplatte bei allen Relativversuchen.

Der Korrektionsfaktor k in Gleichung (6) wurde dann so ermittelt, daß wir eine Reihe von möglichst verschiedenen Kohleproben zugleich nach dem absoluten Verfahren λ und (mit Hilfe der Vergleichsplatte) nach dem relativen Verfahren λ_{rel} prüften; $k = \lambda/\lambda_{rel}$. Die Versuche lieferten die k-Werte nach Abb. 4, und zwar je

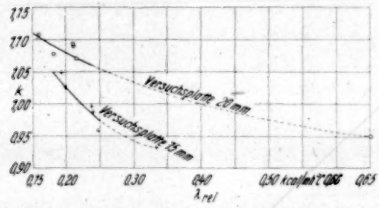


Abb. 4. Korrektionsfaktor k nach Gleichung (6).

eine Korrektionskurve für die beiden vorkommenden Dicken der Versuchsplatten 15 und 20 mm. Der Korrektionsfaktor k ist durch die rechnerisch nicht ganz zu übersehenden Wärmeverluste nach außen bedingt. Zur Auswertung der relativen Messungen wurden nur die in Abb. 4 dick ausgezogenen sicheren Kurventeile benutzt; alle aus diesem Bereich herausfallenden Kohlen wurden absolut gemessen. Zur weiteren Nachprüfung des relativen Versuchsverfahrens führten wir außerdem noch eine Reihe von Hilfsversuchen durch. Diese ergaben:

1. In der Kupferplatte 4, die zwischen der Versuchs- und Vergleichsplatte liegt, treten keine größeren Temperaturunterschiede auf als 0,01° C.
2. Das Verfahren, einen sicheren, luftfreien Kontakt zwischen Kupferplatte und paraffinierter Kohleplatte mit Hilfe einer dünnen Ölzwischenschicht herzustellen (Abschnitt Ib), ist einwandfrei und führt zu keinen Fehlern im λ-Wert.
3. Aus Versuchen mit verschieden großem Temperaturgefälle erhält man stets λ_{rel} bzw. λ-Werte, deren Streuung nicht größer ist als die Genauigkeit des Relativverfahrens; siehe Abschnitt IV.

IV. Ausführung der Messungen

Die Temperaturen wurden mit Eisen-Konstan-Thermoelementen nach dem Kompensationsverfahren von Lindeck-Rothe gemessen. Die Zeitdauer bis zum Erreichen des stationären Zustandes war bei beiden Verfahren gleich (3–4 Stunden); die Beobachtungszeit im Dauerzustand betrug $^1/_2$–$1^1/_2$ Stunden. Die Vorteile des relativen Verfahrens liegen damit wesentlich nur in der Möglichkeit des rascheren Zusammenbaues der Versuchsanordnung. Aus Abb. 4 sieht man, daß das Relativverfahren bei dickeren Versuchsplatten mit Vorsicht angewendet werden muß, da der Korrektionsfaktor k beträchtliche Werte annehmen und damit die Unsicherheit des Verfahrens erhöhen kann. Bei unseren Versuchen betrug die Genauigkeit des Relativverfahrens 2–3 Proz.

V. Versuchsergebnisse[1])

Zur Kennzeichnung der Kohlen wurden außer ihrer Herkunft das Raumgewicht und die Brennstoff- (Immediat-) Analyse benutzt.

Das Raumgewicht (Rohgewicht) R (kg/m³) wurde durch Auswägen und Ausmessen der Versuchsplatten (also aus Masse und Gesamtvolumen einschließlich Poren) bestimmt.

Da die Kohle kein völlig homogener Stoff ist, war zu befürchten, daß fremde (mineralische) Einschlüsse den λ-Wert ändern könnten; dies wurde eingehend untersucht. Wir fanden, daß im allgemeinen geringe Fremdeinschlüsse praktisch keinen Einfluß auf λ haben und daß fast alle Kohlen praktisch so einheitlich sind, daß die an einer Versuchsplatte gemessene Wärmeleitzahl wirklich der betreffenden Kohlenart zugeordnet werden kann.

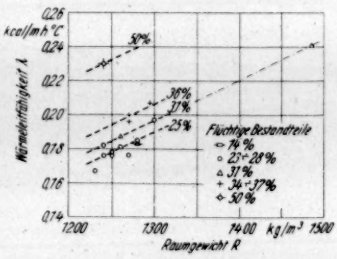


Abb. 5. Gemessene Wärmeleitzahlen von Gas- und Fettkohlen in Abhängigkeit vom Raumgewicht R (Rohgewicht) und vom Gehalt an flüchtigen Bestandteilen Z_f.

Abb. 5 enthält die gemessenen Werte der Wärmeleitfähigkeit von Gas- und Fettkohlen aus sechs rheinisch-westfälischen und oberschlesischen Zechen, aufgetragen über dem Raumgewicht R.

1) Siehe Fußnote 1 auf Seite 361.

Man erkennt, daß die Wärmeleitzahl natürlicher Gas- und Fettkohlen mit dem Raumgewicht wächst – wie bei gewöhnlichen porösen amorphen Körpern – und daß zweitens ein deutlicher Einfluß der Zusammensetzung vorhanden ist. λ wächst mit zunehmendem Gehalt an flüchtigen Bestandteilen Z_f (in Prozenten; Abb. 5). In Abb. 6 sind die λ-Werte für (gasarme) Anthrazitkohlen aus zwei Ruhrzechen eingetragen, deren Gehalt an flüchtigen Bestandteilen zwischen 8 und 11 Proz. liegt. In diesem Bereich ist die Zunahme von λ mit R noch stärker.

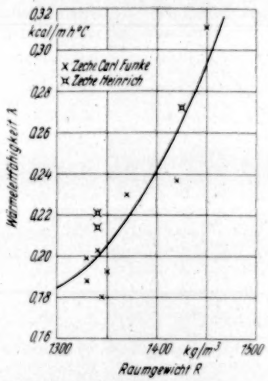


Abb. 6. Gemessene Wärmeleitzahlen von Anthrazitkohlen. $Z_f = 8$–11 Proz.

Verlängert man die Kurve Abb. 6 für Anthrazitkohlen in das Gebiet der niederen Raumgewichte der Gaskohlen, so schließen die Ergebnisse gut aneinander an, die Anthrazitkohlen haben (auf gleiches Raumgewicht bezogen) die kleinsten λ- und Z_f-Werte. Eine Ursache für das Anwachsen von λ mit Z_f liegt sicher darin, daß die Kohle mit größerem Z_f-Gehalt einen besseren inneren Zusammenhalt der Kohlebrücken zwischen den Poren hat. Die Kannelkohle z. B. ist äußerlich nicht von Hartgummi zu unterscheiden; von einzelnen Anthrazitkohlen konnten dagegen nur mit großer Mühe Versuchsplatten hergestellt werden, da sie zerbröckelten. In Abb. 7 ist der ungefähre Verlauf von λ als Funktion von Z_f für $R = 1250$ kg/m³ nach Abb. 5 eingetragen, der tiefste Punkt ist durch Extrapolation aus Abb. 6 gewonnen.

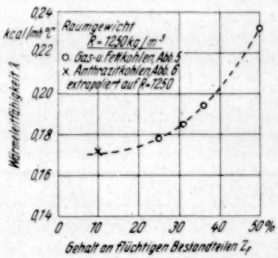


Abb. 7. Die Abhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit von Kohle von dem Gehalt an flüchtigen Bestandteilen Z_f für konstantes Raumgewicht $R = 1250$ kg/m³.

Zahlentafel I

Wärmeleitzahl von Koks

Herkunft und Bezeichnung	Rohkohle	Verkokungs- oder Schwel-temperatur in °C	Raumgewicht kg/m³	Brennstoffanalyse (Rohkohle) Wasser Proz.	Asche Proz.	Brennbares Proz.	flüchtige Bestandteile ohne H_2O	Dicke der untersuchten Platte mm	λ (30 °C) kcal/mh °C
Gas-(Schmelz-) Koks (Berliner Städtische Gaswerke Lichtenberg)	Zeche Monopol	1250	910–950	0,7	8,8	90,5	1,1	18,5	0,62
Schwelkoks (Fried. Krupp A.G. Bergwerke Essen)	Fettkohle mit 25 Proz. flüchtige Bestandteile 5 ÷ 6 Proz. Asche	530 ÷ 550	655	1,1	6,4	92,6	7,4	19,95	0,121
			700	1,1	6,4	92,6	7,4	20,0	0,143

VI. Einfluß der Schichtung

Aus drei Kohleblöcken wurden je zwei Versuchsplatten so herausgeschnitten, daß jeweils in der einen die Schichten parallel und in der anderen senkrecht zu den Planflächen verlaufen. Der Wärmestrom fließt somit im Versuch im ersten Fall senkrecht ($\lambda_\perp$), im zweiten Fall parallel ($\lambda_\parallel$) mit den Schichten. Der Einfluß der Schichtung auf λ ist gering; er geht in der zu erwartenden Richtung: $\lambda_\parallel$ ist in allen drei untersuchten Fällen um 3–4 Proz. größer als $\lambda_\perp$.

VII. Wärmeleitzahl von Koks

Da hinsichtlich der Wärmeleitfähigkeit von Koks bisher besonders große Unsicherheit bestand, untersuchten wir drei Koksproben, bei denen es gelang, brauchbare Versuchsplatten herzustellen.

Die Ergebnisse sind aus Zahlentafel I ersichtlich[1]). In dieser fällt die hohe Wärmeleitzahl von Gasschmelzkoks auf, gegenüber dem λ-Wert der Kohlen und der sehr kleinen Leitzahl des Schwelkoks. Über dieses Verhalten wird in einer in Kürze folgenden Untersuchung ausführlicher berichtet.

Zusammenfassung

Die Wärmeleitfähigkeit deutscher Rohkohle aus verschiedenen deutschen Zechen und Kohlenrevieren wird nach zwei stationären Verfahren – absolut und relativ – an insgesamt 32 Kohle- und 3 Koksplatten gemessen. Herkunft, Raumgewicht und Immediatanalyse dienen zur Kennzeichnung der einzelnen Proben. Der Einfluß der Schichtung und die Temperaturabhängigkeit von λ für eine Kohle werden ermittelt. Die Wärmeleitfähigkeit natürlicher Kohle ist praktisch unabhängig von der Herkunft und wächst wie bei einem amorphen porösen Körper mit dem Raumgewicht; λ ist außerdem noch von der Zusammensetzung abhängig. Frühere Versuche anderer Beobachter streuen sehr; nur Nukiyama[2]) hat an einer Steinkohle einen λ-Wert erhalten, der in den Bereich der Wärmeleitzahlen der vorliegenden Untersuchung fällt.

1) Zahlentafel 1 dient gleichzeitig als Beispiel für die Ausführung der übrigen, sämtliche Versuchsergebnisse enthaltenden Zahlentafeln entsprechend Fußnote 1, S. 361.

2) Shiro Nukiyama, Trans. Soc. Mech. Eng. Japan **2**, 96, 1936 (engl.).

Berlin-Charlottenburg, im April 1939.

(Eingegangen 19. April 1939)

Über die Eigenschwingungen der zylindrischen und sphärischen Welt[1])

Von Paul Otto Müller

Inhaltsübersicht

Einleitung und Problemstellung.

I. Abschnitt: Wir führen im vierdimensionalen Raum neue Koordinaten R, φ, ψ, ϑ ein und zeigen ihren Zusammenhang mit den Polarkoordinaten.

II. Abschnitt: Stereographische Projektion der Hyperkugel auf einen Tangential-R_3, in dem wir unsere Koordinatenflächen anschaulich deuten können; Zusammenhang mit den Ringkoordinaten.

III. Abschnitt: Aufstellung der d'Alembertschen Lichtgleichung in der zylindrischen Welt (Einstein-Welt) und Bestimmung der Eigenschwingungen in diesem Raum.

IV. Abschnitt: Die Tatsache des Auftretens von Eigenschwingungen wird verständlich, da die Amplitude Φ_0 meiner Welle auch Eigenfunktion gewisser Differentialoperatoren mit bestimmten Eigenwerten ist.

V. Abschnitt: Diskussion meiner Wellen, die im Tangential-R_3, auf den stereographisch projiziert wurde, besonders anschauliche Verhältnisse aufweisen; die Wellenfronten rotieren um die Achse gewisser Torusflächen.

VI. Abschnitt: Wir untersuchen die Lichtausbreitung in der sphärischen Welt (de-Sitter-Welt), stellen zuerst die Wellengleichung in Polarkoordinaten auf, bestimmen Eigenschwingungen und diskutieren die einfacheren Fälle.

VII. Abschnitt: Einführung der Ringkoordinaten φ, ψ, ϑ und Bestimmung von Lösungen der Wellengleichung.

VIII. Abschnitt: Wir können eine spezielle Welle des sphärischen Raumes finden, als deren Superposition jede beliebige Welle der de-Sitter-Welt darstellbar ist, so wie dies im gewöhnlichen R_3 bei der ebenen Welle der Fall ist.

Einleitung und Problemstellung

Als einer der jüngsten Zweige der Physik hat sich die Kosmologie entwickelt, deren Aufgabe es ist, Probleme zu lösen, die sich aufs Weltall als Ganzes beziehen. Zur Erklärung verschiedener Tatsachen ist die Vermutung aufgetaucht, ob der Raum, in dem sich das physikalische Geschehen abspielt, sich nicht wie ein dreidimensionales Analogon einer geschlossenen Fläche verhält.

In den Arbeiten von A. S. Eddington über den Zusammenhang zwischen dem kosmischen Bau der Welt und ihrer Struktur im Kleinen[2]) spielen die Eigenschwingungen eines homogenen und isotropen Raumes mit konstanter, positiver

1) Von E. Schrödinger als Dissertationsthema gestellt.

2) Relativity Theory of Protons and Electrons. Cambridge, University Press, 1936.

Krümmung die größte Rolle. Als Ort des physikalischen Geschehens wollen wir die „Oberfläche" der vierdimensionalen Hyperkugel wählen.

Jeder Bestandteil unserer experimentellen Erkenntnis, alles, was wir über die Konfiguration von Ereignispaaren wissen können, ist in der Beziehung ihrer Ausdehnung enthalten. Diese Beziehung heißt Intervall, und ihr Maß wird mit ds bezeichnet. Wir erhalten im allgemeinen eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit mit (im allgemeinen) nichteuklidischer Maßbestimmung, die gegeben ist durch:

$$ds^2 = \sum_1^4 g_{ik} dx_i dx_k .$$

Wir wollen insbesondere nur zwei Formen gekrümmter Welten betrachten: die zylindrische Welt (Einstein-Welt) und die sphärische Welt (de-Sitter-Welt), und in ihnen die Lichtausbreitung untersuchen.

In beiden Fällen spielt sich das Geschehen auf der „Fläche" der vierdimensionalen Hyperkugel ab.

In der zylindrischen Welt entsprechen also die Raumdimensionen einer Kugel, die Zeit ist aber nicht gekrümmt. Das Intervall ds wird die Gestalt besitzen: $ds^2 = -ds_0^2 + c^2 dt^2$, wo ds_0 das gewöhnliche, geometrische Linienelement auf der Hyperkugelfläche bedeutet.

Wir führen jetzt Polarkoordinaten ein: φ, ϑ, χ.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= R \sin\chi \sin\vartheta \sin\varphi \\ x_2 &= R \sin\chi \sin\vartheta \cos\varphi \\ x_3 &= R \sin\chi \cos\vartheta \\ x_4 &= R \cos\chi \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} 0 \leqq \chi &\leqq \pi \\ 0 \leqq \vartheta &\leqq \pi \\ 0 \leqq \varphi &\leqq 2\pi . \end{aligned}$$

Der Punkt $\chi = 0$ hat die cartesischen Koordinaten (0, 0, 0, R) und sei der Ursprung unserer Welt, in der dann $R \cdot \chi$ als Radiusvektor aufgefaßt werden kann und das Intervall dann diese Gestalt annimmt:

$$ds^2 = -R^2 d\chi^2 - R^2 \sin^2\chi\, d\vartheta^2 - R^2 \sin^2\chi \sin^2\vartheta\, d\varphi^2 + c^2 dt^2 .$$

Die Radialgeschwindigkeit des Lichtes ergibt sich dann zu: $\frac{R d\chi}{dt} = c$. Ein Lichtstrahl, der vom Ursprung ausgeht, wird eine endliche Zeit benötigen, wenn er um die Welt herum wieder zum Ausgangspunkt zurückwandert. Die Zeitdauer ergibt sich aus:

$$R d\chi = c\, dt ; \qquad dt = \frac{R}{c} d\chi ;$$

$$T = 2 \int_0^{\pi} \frac{R}{c} d\chi = \frac{2R\pi}{c} .$$

In der de-Sitter-Welt ist aber auch die Zeit sphärisch; das Intervall hat die Gestalt:

$$ds^2 = -ds_0^2 + c^2 \cos^2\chi\, dt^2 .$$

Für eine ruhende Uhr z. B. ergibt sich $ds = Rc \cos\chi\, dt$, die Dauer eines Umlaufes ist proportional zu $\frac{1}{\cos\chi}$; die Schläge der Uhr erfolgen also in immer größer und größer werdenden Abständen, wenn wir uns vom Ursprung $\chi = 0$ entfernen. Auf dem Horizont $\chi = \frac{\pi}{2}$ entspricht jedem endlichen Wert ds ein unendliches dt; wenn irgend etwas sich dort ereignet, so ist dazu eine unendliche Zeit erforderlich. Alle Naturprozesse kommen also für einen im Ursprung befindlichen Beobachter scheinbar zum Stillstand. Man muß aber beachten, daß jeder Punkt mit gleichem Recht als Ausgangspunkt gewählt werden kann, so daß kein wirklicher Unterschied zwischen dem Naturgeschehen am Horizont und im Ursprung besteht. Ein Beobachter am Horizont bemerkt also diesen Stillstand der Ereignisse nicht, denn er hat seinen Horizont in der Entfernung $R\frac{\pi}{2}$, wo für ihn alles Geschehen scheinbar zum Stillstand kommt.

In dieser sphärischen Welt braucht ein Lichtstrahl unendlich lange Zeit, um vom Ursprung zum Horizont zu gelangen, was man sich aus $ds = 0$ leicht ableiten kann.

Wir wollen nun in diesen beiden Welten die Lichtausbreitung betrachten und im besonderen auf die Eigenschwingungen dieser Räume unser Augenmerk richten.

I. Abschnitt

In diesem sowie dem nächsten Abschnitt wollen wir lediglich mathematische Vorarbeit leisten, um dann im physikalischen Teil der Untersuchungen nicht aufgehalten zu werden.

Wir führen auf der Hyperkugel

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2$$

neue Koordinaten ein, mit deren Hilfe wir dann sehr schöne und anschauliche Ergebnisse erzielen werden.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= R \sin\varphi \sin\vartheta \\ x_2 &= R \cos\varphi \sin\vartheta \\ x_3 &= -R \sin\psi \cos\vartheta \\ x_4 &= -R \cos\psi \cos\vartheta \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} 0 \leqq \varphi &\leqq 2\pi \\ -\pi \leqq \psi &\leqq \pi \\ 0 \leqq \vartheta &\leqq \frac{\pi}{2} . \end{aligned}$$

Die Ebenen, in denen φ und ψ variiert, stehen aufeinander total senkrecht, was man leicht für

$\vartheta = 0$ und $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ nachweist. Das Bogenelement nimmt in diesen Koordinaten die Gestalt an:

$$ds_0^2 = dR^2 + R^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2 + R^2 \cos^2\vartheta\, d\psi^2 + R^2 d\vartheta^2 .$$

Die Beziehung zu den Polarkoordinaten φ', ϑ', χ' erhält man durch Gleichsetzen der Ausdrücke für die cartesischen Koordinaten x_i, die ja in Polarkoordinaten sich so schreiben lassen:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= R\sin\chi'\sin\vartheta'\sin\varphi' \\ x_2 &= R\sin\chi'\sin\vartheta'\cos\varphi' \\ x_3 &= R\sin\chi'\cos\vartheta' \\ x_4 &= R\cos\chi' \end{aligned}\right| \qquad \left.\begin{aligned} 0 &\leqq \varphi' \leqq 2\pi \\ 0 &\leqq \vartheta' \leqq \pi \\ 0 &\leqq \chi' \leqq \pi . \end{aligned}\right|$$

Der Zusammenhang zwischen den beiden Koordinatengruppen ergibt sich dann zu:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \varphi' \\ \sin\vartheta &= \sin\vartheta'\sin\chi' \\ \operatorname{tg}\psi &= \cos\vartheta'\operatorname{tg}\chi' \end{aligned}\right|$$

bzw.

$$\left.\begin{aligned} \varphi' &= \varphi \\ \operatorname{tg}\vartheta' &= -\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\sin\psi} \\ \sin\chi' &= \sin\vartheta\cdot\sqrt{1+\sin^2\psi\cot^2\vartheta} . \end{aligned}\right|$$

II. Abschnitt

Um uns die Koordinatenflächen zu veranschaulichen, vollführen wir eine stereographische Projektion der Hyperkugel

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2$$

auf eine Tangentialhyperebene $x_4 + R = 0$, wobei das Projektionszentrum die Koordinaten hat $(0, 0, 0, R)$, also der Ursprung ist. Wähle ich im Tangential-R_3 cartesische Koordinaten ξ, η, ζ bzw. parallel zur x_1, x_2, x_3-Achse, so lauten die Transformationsformeln:

$$\xi = \frac{2Rx_1}{R - x_4} ; \qquad \eta = \frac{2Rx_2}{R - x_4} ; \qquad \zeta = \frac{2Rx_3}{R - x_4}$$

oder

$$\xi = \frac{2\sin\varphi\sin\vartheta}{1+\cos\psi\cos\vartheta} ; \qquad \eta = \frac{2\cos\varphi\sin\vartheta}{1+\cos\psi\cos\vartheta} ;$$

$$\zeta = -\frac{2\sin\psi\cos\vartheta}{1+\cos\psi\cos\vartheta} .$$

Die Fläche $\varphi = \text{const}$ läßt sich auch schreiben: $\frac{\xi}{\eta} = \operatorname{tg}\varphi$, d. h. es ist eine Ebene durch die ζ-Achse und der Winkel φ variiert in der ξ, η-Ebene.

Da nun $r^2 = \xi^2 + \eta^2 = \frac{4\sin^2\vartheta}{(1+\cos\psi\cos\vartheta)^2}$ ebenso wie ζ nur eine Funktion von ψ, ϑ ist, so ist die Fläche $\psi = \text{const}$ ebenso wie $\vartheta = \text{const}$ radialsymmetrisch um die ζ-Achse, und zu ihrer Untersuchung genügt die Betrachtung des Schnittes mit der Ebene $\varphi = 0$.

Ich betrachte zunächst die Fläche $\vartheta = \text{const}$ und den Schnitt der Fläche $\vartheta = \text{const}$ mit der Ebene $\xi = 0$ oder $\varphi = 0$:

$$\eta = \frac{2\sin\vartheta}{1+\cos\psi\cos\vartheta} ; \qquad \zeta = \frac{-2\sin\psi\cos\vartheta}{1+\cos\psi\cos\vartheta} .$$

$$\frac{\eta}{\zeta} = -\frac{\sin\vartheta}{\sin\psi\cos\vartheta} .$$

$$\eta + \eta\cos\psi\cos\vartheta = 2\sin\vartheta ; \quad \eta\sin\psi\cos\vartheta = -\zeta\sin\vartheta .$$

$$\left.\begin{aligned} \eta\cos\psi\cos\vartheta &= -(\eta - 2\sin\vartheta) \\ \eta\sin\psi\cos\vartheta &= -\zeta\sin\vartheta . \end{aligned}\right|$$

Quadriert und addiert ergibt sich dann schließlich:

$$\left(\eta - \frac{2}{\sin\vartheta}\right)^2 + \zeta^2 = 4\cot^2\vartheta .$$

Dies bedeutet in der η-ζ-Ebene einen Kreis mit den Bestimmungsstücken:

$$K\left(\frac{2}{\sin\vartheta} ,\quad 0,\quad 2\cot\vartheta\right) .$$

Wegen der Radialsymmetrie um die ζ-Achse ist die Fläche $\vartheta = \text{const}$ ein Torus[1]).

Für $\vartheta = 0$ schrumpft die Fläche auf die ζ-Achse zusammen:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= -R\sin\psi \\ x_4 &= -R\cos\psi \end{aligned}\right| \qquad \left.\begin{aligned} \xi &= 0 \\ \eta &= 0 \\ \zeta &= -2\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} . \end{aligned}\right|$$

Für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich ein Kreis vom Radius 2 in der ξ, η-Ebene:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= R\sin\varphi \\ x_2 &= R\cos\varphi \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}\right| \qquad \left.\begin{aligned} \xi &= 2\sin\varphi \\ \eta &= 2\cos\varphi \\ \zeta &= 0 . \end{aligned}\right|$$

1) Vgl.: F. Klein, Vorlesungen über nichteuklid. Geometrie, 1928, S. 241: Die Cliffordsche Fläche.

Aus der Fig. 1 findet man ferner noch folgendes: $r_M = \frac{2}{\sin\vartheta}$,

$$\left.\begin{aligned} r_{\max} &= \frac{2}{\sin\vartheta} + 2\cot\vartheta = 2\cot\frac{\vartheta}{2} \\ r_{\min} &= \frac{2}{\sin\vartheta} - 2\cot\vartheta = 2\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} \end{aligned}\right| \quad r_{\max}\cdot r_{\min} = 4 = \text{const.},$$

das heißt: Die Schnittkreise bilden ein Kreisbüschel, deren Tangente vom Ursprung aus die Länge 2 hat, oder: sie schneiden alle den Kreis (0, 0, 2) normal. Die Torusflächen sind alle so beschaffen, daß sie die Kugel $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=4$ orthogonal schneiden.

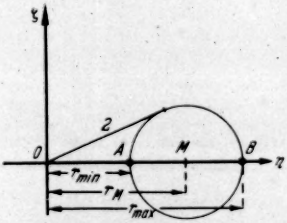


Fig. 1.

Der Nulltorus ist der Kreis $\xi^2+\eta^2=4$, $\zeta=0$.

Ferner gilt noch für jeden beliebigen Torus $\vartheta=\text{const}$, daß auf ihm das Linienelement die Gestalt hat:

$$ds^2 = R^2(\sin^2\vartheta\, d\varphi^2 + \cos^2\vartheta\, d\psi^2).$$

Die Koeffizienten der Differentiale $d\varphi$ und $d\psi$ sind konstant, was die Gleichberechtigung aller Punkte auf dem Torus $\vartheta=\text{const}$ bedeutet. Dies gilt natürlich nur im $R_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$ und nicht in der stereographischen Projektion, also im $R_3(\xi, \eta, \zeta)$, wo doch elliptische, parabolische und hyperbolische Punkte auftreten.

Aus der Gestalt von ds^2 folgt noch die Orthogonalität der Flächen $\psi=\text{const}$ und $\vartheta=\text{const}$, so daß die Flächen $\psi=\text{const}$ die Schar der Kugeln durch den Kreis $\xi^2+\eta^2=4$, $\zeta=0$ darstellen, was sich sofort aus der Betrachtung des Schnittes mit der Ebene $\varphi=0$ und Berücksichtigung der Radialsymmetrie um die ζ-Achse ergibt.

Nun bestehen in der r, ζ-Ebene die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{2\sin\vartheta}{1+\cos\psi\cos\vartheta} \\ \zeta &= \frac{-2\sin\psi\cos\vartheta}{1+\cos\psi\cos\vartheta}. \end{aligned}\right|$$

Läßt man ϑ nur so variieren: $0 \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2}$, so erhält man bei konstantem ψ nicht die gesamte Kugel, sondern nur die über oder unter der Ebene $\zeta=0$ liegende Kalotte; andernfalls gäbe es auch zwei verschiedene Punkte mit gleichem φ, ψ, ϑ. Solange $\pi > \psi > 0$, ist $\zeta < 0$, und wenn $0 > \psi > -\pi$, so erhält man wegen $\zeta > 0$ den „oberen" Teil der Kugel.

Ich betrachte die Kugelkalotte $\psi=\text{const}$: Es ergibt sich nach ganz einfachen Rechnungen für den Mittelpunkt: $M(0, 0, 2\cot\psi_0)$ und für den Radius: $\varrho = \frac{2}{\sin\psi_0}$, wenn ich $\psi=\psi_0$ betrachte.

Zu einem vorgegebenen $\psi=\psi_0$ bekommt man den zweiten Teil der Kugel für $\psi=\psi_0 \mp \pi$, je nachdem $\psi_0 > 0$ oder $\psi_0 < 0$ ist, da dann der Mittelpunkt seine Lage nicht ändert.

Die Kurven $\varphi=\varphi_0$, also die ψ-Kurven, sind die Meridiane unserer Torusflächen, die Kurven $\psi=\psi_0$, also die φ-Kurven, sind die Parallelkreise. Sie bilden ein orthogonales Netz, auch auf der Hyperkugel, da ja die stereographische Projektion winkeltreu ist.

Zusammenhang mit den Ringkoordinaten

Führe ich im $R_3(\xi, \eta, \zeta)$ Zylinderkoordinaten φ, $\varrho = \sqrt{\xi^2+\eta^2}$, ζ ein, so erhält man daraus so die Ringkoordinaten[1]): φ, λ, ω. Der Ansatz hat die Gestalt:

$$\varrho + i\zeta = 2\cdot\frac{1-e^{\lambda+i\omega}}{1+e^{\lambda+i\omega}}.$$

Vergleichen wir diese Ringkoordinaten mit unseren Koordinaten φ, ψ, ϑ, so ergibt sich schließlich nach ganz elementaren Umrechnungen die Beziehung:

$$\omega = \psi, \qquad \mathfrak{Cof}\,\lambda = \frac{1}{\cos\vartheta}.$$

Die Koordinatenflächen in beiden Koordinaten sind also ganz die gleichen, nur λ und ϑ sind anders gezählt; meine Koordinaten φ, ψ, ϑ sind also im wesentlichen Ringkoordinaten.

1) H. Weber, Die part. Differentialgleichungen der math. Physik I, 1910, S. 466.

III. Abschnitt

Die Eigenschwingungen der zylindrischen Welt

Das Linienelement im zylindrischen Raum hat die Gestalt: $ds^2 = -ds_0^2 + dt^2$, wobei ds_0 das gewöhnliche, geometrische Linienelement auf der Hypersphäre unserer vierdimensionalen Kugel bedeutet und die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ gesetzt wurde. In unseren, den Ringkoordinaten so nahe verwandten Koordinaten φ, ψ, ϑ erhalten wir:

$$ds^2 = -R^2(\sin^2\vartheta\, d\varphi^2 + \cos^2\vartheta\, d\psi^2 + d\vartheta^2) + dt^2 .$$

Aus dieser Formel erhält man durch Bildung der vierdimensionalen, kovarianten Divgrad die d'Alembertsche Wellengleichung im zylindrischen Raum:

$$\frac{1}{\sin\vartheta\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\cos\vartheta\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\cos^2\vartheta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\psi^2} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = R^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} .$$

Setze ich $\Phi = \Phi_0 \cdot e^{-2\pi i\nu t}$, so bekommt man $K\Phi_0 + \varkappa^2\Phi_0 = 0$, wobei K den auf die neuen Koordinaten φ, ψ, ϑ umgeschriebenen Kugelfunktionenoperator bedeutet und $\varkappa$ den Wert hat: $\varkappa = 2\pi\nu R$.

Der Ansatz $\Phi_0 = \Theta(\vartheta)\cdot e^{im\varphi}\cdot e^{im'\psi}$ ergibt für natürlich ganzzahliges m und m':

$$\frac{1}{\sin\vartheta\cos\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\cos\vartheta\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right) - \frac{m'^2}{\cos^2\vartheta}\Theta - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\Theta + \varkappa^2\Theta = 0 .$$

Obige Gleichung läßt sich auch schreiben:

$$\frac{1}{\sin 2\vartheta}\cdot\frac{d}{d2\vartheta}\left(\sin 2\vartheta\frac{d\Theta}{d2\vartheta}\right) + \frac{1}{4}\left(\varkappa^2 - \frac{2m^2}{1-\cos 2\vartheta} - \frac{2m'^2}{1+\cos 2\vartheta}\right)\cdot\Theta = 0$$

und durch die Transformation $x = \cos 2\vartheta$ geht sie in diese lineare Differentialgleichung 2. Ordnung über:

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta}{dx} + \frac{1}{4}\left(\varkappa^2 - \frac{2m^2}{1-x} - \frac{2m'^2}{1+x}\right)\Theta = 0 .$$

Da wir nur auf der ganzen Hypersphäre reguläre Lösungen der Wellengleichung brauchen können, so müssen wir solche Funktionen $\Theta(x)$ suchen, die im Intervall $[-1, +1]$ in x regulär sind. Wir werden sehen, daß die Regularität nur für ganz bestimmte, also „erlaubte" Werte von $\varkappa$ eintritt.

Um diese Lösungen zu finden, versuchen wir den Ansatz: $\Theta(x) = (1-x)^\alpha\cdot(1+x)^\beta$. Setzt man dieses $\Theta(x)$ in seine Gleichung ein, so erhält man nach Division durch $(1-x)^{\alpha-1}\cdot(1+x)^{\beta-1}$ folgende Gleichung:

$$\alpha^2(1+x)^2 - \left(2\alpha\beta + \alpha + \beta - \frac{\varkappa^2}{4}\right)(1-x^2) + \beta^2(1-x)^2 - \frac{m^2}{2}(1+x) - \frac{m'^2}{2}(1-x) = 0 .$$

Die Koeffizienten von x^2, x und das absolute Glied müssen verschwinden:

(I) $$\alpha^2 + \beta^2 + \left(2\alpha\beta + \alpha + \beta - \frac{\varkappa^2}{4}\right) = 0 ,$$

(II) $$2\alpha^2 - 2\beta^2 - \frac{m^2}{2} + \frac{m'^2}{2} = 0 ,$$

(III) $$\alpha^2 + \beta^2 - \left(2\alpha\beta + \alpha + \beta - \frac{\varkappa^2}{4}\right) - \frac{m^2}{2} - \frac{m'^2}{2} = 0 ,$$

(I u. III) $$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{m^2}{4} + \frac{m'^2}{4}$$

(II) $$\alpha^2 - \beta^2 = \frac{m^2}{4} - \frac{m'^2}{4}$$

$$\Big\} \quad \alpha = \pm\frac{m}{2}; \qquad \beta = \pm\frac{m'}{2} .$$

Aus Gründen der Regularität in x im Intervall $[-1, +1]$ kommt nur in Betracht:

$$\Theta(x) = (1-x)^{\frac{m}{2}} \cdot (1+x)^{\frac{m'}{2}}, \quad (m>0, m'>0).$$

Die Konstanten m, m' und $\varkappa$ müssen aber noch diese Bedingungsgleichung erfüllen:

$$\frac{\varkappa^2}{4} = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta + \alpha + \beta = \frac{m^2}{4} + \frac{m'^2}{4} + \frac{mm'}{2} + \frac{m}{2} + \frac{m'}{2}.$$

Setzen wir einfach an $\varkappa^2 = n(n+2)$, so folgt für diese spezielle Lösung Θ ein ganzzahliges $n = m + m'$, da ja $\varkappa^2 = (m+m')\cdot(m+m'+2)$.

Wir wollen jetzt unsere Differentialgleichung für $\Theta(x)$ auch für den allgemeinen Fall lösen, daß $m + m' \neq n$, wenn wir die Bezeichnung aufrechterhalten: $\varkappa^2 = n(n+2)$.

$$(1-x^2)\Theta'' - 2x\Theta' + \frac{n(n+2)}{4}\Theta - \frac{1}{2}\cdot\frac{m^2}{1-x}\Theta - \frac{1}{2}\cdot\frac{m'^2}{1+x}\Theta = 0.$$

Man wird hier nur positives m und m' wählen und beachten, daß dann in der Formel für Φ_0 zu schreiben ist: $\Phi_0 = e^{\pm im\varphi}\cdot e^{\pm im'\psi}\cdot\Theta(\beta)$.

Setzen wir $m + m' = n_0$, dann erfüllt

$$\varphi(x) = (1-x)^{\frac{m}{2}}\cdot(1+x)^{\frac{m'}{2}}$$

die Gleichung:

$$(1-x^2)\varphi'' - 2x\varphi' + \frac{n_0(n_0+2)}{4}\varphi - \frac{1}{2}\cdot\frac{m^2}{1-x}\varphi - \frac{1}{2}\cdot\frac{m'^2}{1-x}\varphi = 0.$$

Setzen wir noch

$$\frac{n(n+2)}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{m^2}{1-x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{m'^2}{1+x} = \lambda(x),$$

sowie

$$\frac{n_0(n_0+2)}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{m^2}{1-x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{m'^2}{1-x} = \lambda_0(x).$$

so folgt

$$\left.\begin{aligned}(1-x^2)\Theta'' - 2x\Theta' + \lambda\Theta &= 0\\ (1-x^2)\varphi'' - 2x\varphi' + \lambda_0\varphi &= 0.\end{aligned}\right\}$$

Der Ansatz: $\Theta(x) = \varphi(x)\cdot f(x)$ gibt dann die Gleichung:

$$(1-x^2)f'' - 2\left[x - (1-x^2)\frac{\varphi'}{\varphi}\right]f' + \frac{1}{\varphi}\left[\underline{(1-x^2)\varphi'' - 2x\varphi'} + \lambda_0\varphi + (\lambda-\lambda_0)\varphi\right]f = 0.$$

Das Unterstrichene verschwindet und der Koeffizient von $f(x)$ ist eine Konstante:

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{n(n+2) - n_0(n_0+2)}{4}.$$

Der Koeffizient von $f'(x)$ ergibt sich wegen

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = -\frac{m}{2}\cdot\frac{1}{1-x} + \frac{m'}{2}\cdot\frac{1}{1+x}$$

zu

$$x - (1-x^2)\frac{\varphi'}{\varphi} = x - \left[-\frac{m}{2}(1+x) + \frac{m'}{2}(1-x)\right] = \left(\frac{m}{2} - \frac{m'}{2}\right) + \left(\frac{m}{2} + \frac{m'}{2} + 1\right)x.$$

Die Differentialgleichung für $f(x)$ lautet dann:

$$(1-x^2)f'' - [m - m' + (m+m'+2)x]f' + \frac{n(n+2) - n_0(n_0+2)}{4}f = 0$$

oder

$$(1-x^2)f'' - (\lambda + \mu x)f' + \nu f = 0,$$

wenn gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned}\lambda &= m - m'\\ \mu &= m + m' + 2 = n_0 + 2\\ \nu &= \frac{n(n+2) - n_0(n_0+2)}{4}\end{aligned}\right|$$

$$\Theta(x) = (1-x)^{\frac{m}{2}}\cdot(1+x)^{\frac{m'}{2}}\cdot f(x).$$

Transformation der Differentialgleichung für $f(x)$

Setzt man $\xi = \frac{1}{2}(1-x)$, also $x = 1 - 2\xi$, so ergibt sich die Gleichung:

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2f}{d\xi^2} + \left[\frac{\lambda+\mu}{2} - \mu\xi\right]\frac{df}{d\xi} + \nu f = 0.$$

Diese Differentialgleichung hat die Gestalt der Gaußschen mit der hypergeometrischen Reihe als Lösung.

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0$$

hat ja die Lösung: $y = F(a, b, c; x)$. Dabei ist $F(a, b, c; 1)$ konvergent, wenn $c - a - b > 1$,

und divergent, wenn $c - a - b < 1$. Der Vergleich mit $f(x)$ liefert:

$$c = \frac{\lambda + \mu}{2} = \frac{1}{2}(m - m' + m + m' + 2) = m + 1$$

$$a + b = \mu - 1 = m + m' + 1 = n_0 + 1$$

$$ab = -\nu = \left(\frac{n_0}{2} - \frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2} + \frac{n_0}{2} + 1\right).$$

Diese Bedingungsgleichungen werden erfüllt für:

$$a = \frac{n_0 - n}{2}\,;\; b = \frac{n_0 + n}{2} + 1\,;\; c = m + 1\,,$$

so daß sich ergibt:

$$f(x) = F\left(\frac{n_0 - n}{2}, \frac{n_0 + n}{2} + 1, m + 1; \frac{1 - x}{2}\right).$$

Es handelt sich jetzt um die Konvergenz dieser Reihe für $x = -1$, also

$$c - a - b = m + 1 + \frac{n - n_0}{2} - \frac{n_0 + n}{2} - 1 = m - n_0.$$

Da $m < n_0$ ist wegen $m + m' = n_0$ und $m' \geqq 0$, so folgt $m - n_0 = -m' < 1$, also ist dort die Reihe divergent, wenn sie nicht früher abbricht. Dies tut sie aber dann, und nur dann, wenn $\frac{n - n_0}{2}$ eine natürliche Zahl ist, d. h. n muß eine natürliche Zahl und mit n_0 gleichzeitig gerade oder ungerade sein. Es muß also auch bestehen: $n_0 = m + m' \leq n$.

Lasse ich jetzt wieder positives und negatives m und m' zu, so lautet diese Bedingung $|m \pm m'| \leq n$, und meine Amplitude hat die Gestalt:

$$\Phi_0 = \Theta(\vartheta) \cdot e^{imq} \cdot e^{im'\psi}.$$

Wenn aber $m > 0$ und $m' > 0$ gesetzt wird, so ergibt sich:

$$\Theta(\cos 2\vartheta) = \sin^m \vartheta \cdot \cos^{m'} \vartheta \cdot \times F\left(\frac{n_0 - n}{2}, \frac{n_0 + n}{2} + 1, m + 1; \sin^2 \vartheta\right).$$

F ist ein Polynom in $\sin\vartheta$ vom Grad $n - n_0$.

$$\Phi = \sin^m \vartheta \cos^{m'} \vartheta \cdot F\left(\frac{n_0 - n}{2}, \frac{n_0 + n}{2} + 1, m + 1; \sin^2 \vartheta\right) \cdot e^{i(\pm mq \pm m'\psi)} \cdot e^{-2\pi i \nu t}.$$

Auf diese Quantelung und Beschränkung der Zahlen n, m, m' durch die Forderung der Konvergenz der hypergeometrischen Reihe werden wir im nächsten Abschnitt noch zurückkommen.

Vorher sei noch bemerkt, daß jede abbrechende hypergeometrische Reihe auch als Jacobisches Polynom[1]) bezeichnet wird. — Es läßt sich dann $f(x)$ noch auf die Gestalt bringen:

$$f(x) = \text{const} \cdot (1 - x)^{-m} \cdot (1 + x)^{-m'} \cdot \frac{d^{\frac{n - n_0}{2}}}{dx^{\frac{n - n_0}{2}}} \left| (1 - x)^{\frac{n + m - m'}{2}} \cdot (1 + x)^{\frac{n - m + m'}{2}} \right|.$$

Die Differentialgleichung für $f(x)$ läßt sich übrigens auch elementar integrieren durch den Ansatz:

$$f(x) = \frac{d^{\frac{n + n_0}{2}} R(x)}{dx^{\frac{n + n_0}{2}}},$$

woraus sich dann diese Gestalt der Gleichung für $R(x)$ ergibt:

$$(1 - x^2) R' - (m - m' - nx) \cdot R = 0.$$

Setzt man noch $R(x) = (1 - x)^p \cdot (1 + x)^q$, so erhält man schließlich:

$$f(x) = \frac{d^{\frac{n + n_0}{2}}}{dx^{\frac{n + n_0}{2}}} \left[(1 - x)^{\frac{n - m + m'}{2}} \cdot (1 + x)^{\frac{n + m - m'}{2}} \right].$$

Für unsere weiteren Untersuchungen sind aber diese Gestalten von $f(x)$ gänzlich belanglos.

IV. Abschnitt

Eigenwerte und Eigenfunktionen

Die im vorherigen Abschnitt durch die Forderung der Konvergenz der hypergeometrischen Reihe abgeleiteten Beschränkungen und Quantelungen der Zahlen n, m, m' folgen auch noch aus der Tatsache, daß diese Zahlen gleichzeitig Eigenwerte gewisser Differentialoperatoren sind.

Zunächst wollen wir auf folgende wohlbekannte Tatsache hinweisen[2]): Sind A_1, A_2, A_3

1) Courant-Hilbert, Meth. der math. Physik, 1924, S. 75.

2) Dirac, Quantum Mechanics. Oxford, Clarendon Press, 1930, 1. Aufl., S. 88. Deutsche Ausgabe. Leipzig, S. Hirzel 1930. — Die ganze Schlußweise stammt im wesentlichen von Born-Heisenberg-Jordan.

drei „reelle" Operatoren mit den Vertauschungsrelationen

$$A_1 A_2 - A_2 A_1 = i A_3$$

und zyklisch (1, 2, 3), und sei

$$K = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 ,$$

dann gilt für die Eigenwerte einer gemeinsamen Eigenfunktion ψ von K und (z. B.) A_3:

$$K' = l\,(l+1) \ldots 2l = 0, 1, 2, \ldots$$
$$A_3' = -l, -l+1, \ldots, \quad l-1, l .$$

Nun wenden wir uns wieder unserem $R_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$ zu, indem wir die Drehung der Hypersphäre in sich betrachten. Eine Drehung wird beschrieben durch zwei aufeinander total senkrechte Großkreise, wenn ich noch den Drehwinkel in jeder dieser Äquatorebenen angebe. Für einen Mikrobeobachter auf einem dieser Kreise ist die Teildrehung, die seinen Kreis in sich verschiebt, eine Translation in Richtung desselben, die andere Teildrehung ist eine Rotation um seinen Kreis als Achse, so daß der ganze Effekt von ihm als Schraubung gedeutet wird.

Im besonderen wollen wir solche Drehungen betrachten, wo einer der Drehungswinkel verschwindet, d. h. der eine Äquator bleibt punktweise fest, der andere wird in sich verschoben.

Die sechs Großkreise, die von den Koordinatenebenen des R_4 aus der Hyperkugel ausgeschnitten werden, ordnen sich zu drei Paaren solcher total senkrechter Kreise, z. B. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

Die ganze Drehungsgruppe kann man nun aus sechs erzeugenden, infinitesimalen, speziellen Drehungen zusammensetzen, deren jede einen dieser obigen sechs Großkreise in sich dreht, den dazu total senkrechten aber punktweise festläßt.

Die diesen sechs erzeugenden, infinitesimalen Drehungen entsprechenden Operatoren sind gegeben durch:

$$M_1 = -i\left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$$

und zweimal zyklisch (1, 2, 3),

$$N_1 = -i\left(x_4 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_4}\right)$$

und zweimal zyklisch (1, 2, 3).

Diese Operatoren sind reell, haben also reelle Eigenwerte und sind mit $h = 2\pi$ direkt die quantenmechanischen Drehimpulsoperatoren.

Zur Abkürzung setzen wir:

$$M^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2$$
$$N^2 = N_1^2 + N_2^2 + N_3^2$$
$$MN = M_1 N_1 + M_2 N_2 + M_3 N_3$$

Wir definieren nun folgende neue Operatoren:

$$\xi_1 = \tfrac{1}{2}\,(M_1 + N_1)$$

und zweimal zyklisch (1, 2, 3).

$$\eta_1 = \tfrac{1}{2}\,(M_1 - N_1)$$

und zweimal zyklisch (1, 2, 3).

Diesen Operatoren entsprechen Drehungen, wo in einem Paar von zugeordneten (total senkrechten) Großkreisen um den gleichen oder den entgegengesetzten Winkel gedreht wird. Diese Operatoren sind reell und erfüllen dieselben Vertauschungsrelationen wie oben die A_1, A_2, A_3.

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 \xi_2 - \xi_2 \xi_1 &= i \xi_3 \\ \eta_1 \eta_2 - \eta_2 \eta_1 &= i \eta_3 \end{aligned}\right| \ (1, 2, 3) .$$

Da wegen $MN = 0$ folgt, daß $\sum_1^3 \xi_k^2 = \frac{1}{4}\,(M^2 + N^2) = \sum_1^3 \eta_k^2$, so gilt für eine gemeinsame Eigenfunktion ψ:

$$\sum_1^3 \xi_k^2\, \psi = \alpha(\alpha+1) \cdot \psi \ldots\ldots\ldots 2\alpha = 0, 1, 2, \ldots$$
$$\xi_3', \eta_3' = -\alpha, -\alpha+1, \ldots\ldots \alpha-1, \alpha .$$

Es gibt insgesamt $(2\alpha+1)^2$ Kombinationen. Da $(M^2 + N^2) = 4 \sum_1^3 \xi_k^2$, so ist

$$(M^2 + N^2)' = 2\alpha(2\alpha+2) = n(n+2) \ldots n = 2\alpha .$$

Da nun $\xi_3' = \frac{1}{2}\,(M_3' + N_3')$ und $\eta_3' = \frac{1}{2}\,(M_3' - N_3')$ und da nun diese Eigenwerte unter den $2\alpha+1$ Zahlen: $-\alpha, -\alpha+1, \ldots \alpha-1, \alpha$ vorkommen müssen, können wir ansetzen:

$$M_3' \pm N_3' = 2'\alpha - 2k = n - 2k \ldots (k = 0, 1, 2, \ldots n).$$

Für die Auswahl der Eigenwerte kann man oben insgesamt folgendes ablesen:

$$(M^2 + N^2)' = n(n+2) \ldots n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$M_3', N_3' = -n, \quad -n+1, \ldots, \quad n-1, n .$$

Es bestehen aber noch zwei weitere Nebenbedingungen:

1. $M_3' \pm N_3'$ und n müssen gleichzeitig entweder gerade oder ungerade sein und
2. $|M_3' \pm N_3'| \leq n$.

Der Entartungsgrad beträgt: $(n+1)^2$.

Was nun unsere Verhältnisse im zylindrischen Raum betrifft, so bedeutet $K = -(M^2 + N^2)$ den Kugelfunktionenoperator, wenn ich im R_4 Polarkoordinaten einführe (Abschnitt III).

Da die Amplitude Φ_0 der Wellengleichung die Beziehung erfüllt:

$$K\Phi_0 + \varkappa^2 \cdot \Phi_0 = 0 \quad \text{oder} \quad (M^2 + N^2)\Phi_0 = \varkappa^2 \cdot \Phi_0 ,$$

da ferner φ in der x_1, x_2-Ebene variiert und $M_3 = i\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$, ferner ψ in der x_3, x_4-Ebene variiert und $N_3 = -i\dfrac{\partial}{\partial\psi}$, so gilt auch:

$$M_3\Phi_0 = -m\cdot\Phi_0 \ldots M_3' = -m\,,$$
$$N_3\Phi_0 = m'\cdot\Phi_0 \ldots N_3' = m'\,.$$

So ist Φ_0 eine gemeinsame Eigenfunktion der drei Operatoren $(M^2+N^2), M_3, N_3$, und es gelten die oben abgeleiteten Quantelungen und Beschränkungen der Eigenwerte:

$$\varkappa^2 = n(n+2)\ldots n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$m,\ m' = -n,\ -n+1, \ldots, n-1, n\,.$$

Ferner: $n_0 = m + m'$ muß mit n gleichzeitig gerade oder ungerade sein, ebenso $|m \pm m'| \leqq n$. Der Wert der Eigenfrequenz beträgt:

$$\nu = \frac{\sqrt{n(n+2)}}{2\pi R}\,.$$

Das sind aber gerade die Bedingungen, die wir aus der Forderung der Konvergenz der hypergeometrischen Reihe erhalten haben.

V. Abschnitt

Diskussion der Wellen $\Phi(\varphi, \psi, \vartheta, t)$

Wir wollen gewisse Sonderfälle betrachten, die besonders schöne und anschauliche Verhältnisse aufweisen.

Die Welle mit $m = m'$

Ein Blick auf die Differentialgleichung für $\Theta(x)$ zeigt sofort, daß $\Theta(x) = P_{\frac{n}{2}}^{m}(x)$ die zugeordnete Kugelfunktion sein muß. n ist nämlich gerade, da $m + m' = 2m$ es ist. Meine Welle hat dann die Gestalt:

$$\Phi(\varphi, \psi, \vartheta, t) = e^{\pm i m(\varphi \pm \psi)} \times \sin^m 2\vartheta \cdot P_{\frac{n}{2}}^{(m)}(\cos 2\vartheta)\cdot e^{-2\pi i \nu_{n,l} t}\,.$$

Wenn die Quantenzahl m sehr groß ist, so ist die Welle praktisch auf den Torus $\vartheta = \dfrac{\pi}{4}$ beschränkt; ein Mikrobeobachter auf ihm sieht eine Welle, unbegrenzt nach vorn und seitlich, aber nach oben und unten sehr schnell abklingend.

Die Wellenfronten auf den Torusflächen $\vartheta = \text{const}$ sind die Kurven $\varphi \pm \psi = \text{const}$. Diese Kurvenpaare gehen für verschiedene Konstanten auseinander einfach durch Drehung in der φ-Ebene hervor, so daß als Typus nur zu betrachten ist: $\varphi \pm \psi = 0$. Ferner sei $R = 1$.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \sin\varphi\sin\vartheta \\ x_2 &= \cos\varphi\sin\vartheta \\ x_3 &= \pm\sin\varphi\cos\vartheta \\ x_4 &= -\cos\varphi\cos\vartheta \end{aligned}\right| \qquad \left.\begin{aligned} x_1\cos\vartheta \pm x_3\sin\vartheta &= 0 \\ x_2\cos\vartheta + x_4\sin\vartheta &= 0. \end{aligned}\right|$$

Die Kurven $\varphi \pm \psi = 0$ sind als Schnitt von je zwei Hyperebenen mit der Hyperkugel zwei Kreise und werden es auch nach der stereographischen Projektion auf unserem Torus sein.

Die beiden Kreisscharen $\varphi \pm \psi = \text{const}$ schneiden sich unter dem konstanten Winkel $\omega = 2\vartheta$.

Beweis:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \sin\varphi\sin\vartheta \\ x_2 &= \cos\varphi\sin\vartheta \\ x_3 &= -\sin(\varphi + c_1)\cos\vartheta \\ x_4 &= -\cos(\varphi + c_1)\cos\vartheta \end{aligned}\right| \quad K_1 : \psi = \varphi + c_1$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \sin\varphi\sin\vartheta \\ x_2 &= \cos\varphi\sin\vartheta \\ x_3 &= -\sin(c_2 - \varphi)\cos\vartheta \\ x_4 &= -\cos(c_2 - \varphi)\cos\vartheta \end{aligned}\right| \quad K_2 : \psi = c_2 - \varphi\,.$$

In einem Schnittpunkt haben die Tangentenvektoren $\mathfrak{t}_i$ an die Kreise K_i die Koordinaten:

$$\mathfrak{t}_1 : \left|\begin{aligned} &\cos\varphi\sin\vartheta \\ &-\sin\varphi\sin\vartheta \\ &-\cos(\varphi + c_1)\cos\vartheta \\ &\sin(\varphi + c_1)\cos\vartheta \end{aligned}\right.$$

$$\mathfrak{t}_2 : \left|\begin{aligned} &\cos\varphi\sin\vartheta \\ &-\sin\varphi\sin\vartheta \\ &\cos(c_2 - \varphi)\cos\vartheta \\ &-\sin(c_2 - \varphi)\cos\vartheta\,. \end{aligned}\right.$$

Das skalare Produkt der beiden Vektoren liefert uns den cos des gesuchten Winkels:

$$\cos\omega = \mathfrak{t}_1\cdot\mathfrak{t}_2 = -\cos 2\vartheta \ldots -\omega = 2\vartheta\,.$$

Im Falle $\vartheta = \dfrac{\pi}{4}$ bilden die beiden Kreisscharen auf dem Torus ein orthogonales Netz. Dann sind z. B. $\varphi + \psi = \text{const}$ die Wellenfronten und $\varphi - \psi = \text{const}$ sind als Orthogonaltrajektorien die Wellenstrahlen.

Ganz analog läßt sich zeigen, daß der Winkel ω' zwischen dem Parallelkreis $\psi = \psi_0$ und dem Kreis $\psi = c \pm \varphi$ den Wert hat: $\omega' = \dfrac{\pi}{2} - \vartheta$.

Im Fall $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ schneiden die Kreise $\varphi \pm \psi = \text{const}$ die Meridiane und Parallelkreise unter einem Winkel von 45 Grad.

Die Welle mit $m = m'$ auf dem Torus $\vartheta = \frac{\pi}{4}$

Eine Untersuchung ist in diesem Fall nur sinnvoll, wenn $P_n^m(0) \neq 0$, was dann und nur dann der Fall ist, wenn $\frac{n}{2} - m$ eine gerade Zahl ist. Dann genügt die Betrachtung von:

$$\Phi = e^{-2\pi i \nu \left(t - \frac{m(\varphi \pm \psi)}{2\pi\nu}\right)}.$$

Die Wellenfronten sind $\varphi \pm \psi = \text{const}$, die Wellenstrahlen sind $\varphi \mp \psi = \text{const}$. Die ganze Wellenfront rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um die ζ-Achse (Fig. 2).

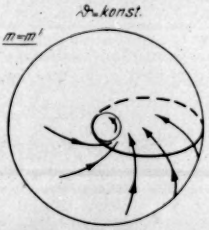


Fig. 2.

Wellenstrahlen auf dem Torus $\vartheta = \text{const}$

Wir betrachten immer noch die Welle mit $m = m'$, aber auf einem Torus mit beliebigem ϑ und nicht mehr auf dem Torus $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ wie oben. $\psi = c \pm \varphi$ sei die Wellenfront, $\psi = f(\varphi)$ sei die Gleichung der zugehörigen Orthogonaltrajektorie.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \sin\varphi \sin\vartheta \\ x_2 &= \cos\varphi \sin\vartheta \\ x_3 &= -\sin(c \pm \varphi)\cos\vartheta \\ x_4 &= -\cos(c \pm \varphi)\cos\vartheta \end{aligned}\right\} \text{Wellenfront}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \sin\varphi \sin\vartheta \\ x_2 &= \cos\varphi \sin\vartheta \\ x_3 &= -\sin f(\varphi)\cos\vartheta \\ x_4 &= -\cos f(\varphi)\cos\vartheta \end{aligned}\right\} \text{Wellenstrahl.}$$

Die Tangentenvektoren haben die Koordinaten:

$$\mathfrak{t}_1 \left\{\begin{aligned} &\cos\varphi \sin\vartheta \\ &-\sin\varphi \sin\vartheta \\ &\mp\cos(c \pm \varphi)\cos\vartheta \\ &\pm\sin(c \pm \varphi)\cos\vartheta \end{aligned}\right.$$

$$\mathfrak{t}_2 \left\{\begin{aligned} &\cos\varphi \sin\vartheta \\ &-\sin\varphi \sin\vartheta \\ &-f'(\varphi)\cdot\cos f\cdot\cos\vartheta \\ &f'(\varphi)\sin f\cos\vartheta. \end{aligned}\right.$$

Das skalare Produkt muß verschwinden, und man erhält im Schnittpunkt von Wellenstrahl und Wellenfront:

$$\sin^2\vartheta \pm f'(\varphi)\cos^2\vartheta = 0$$

oder

$$\psi = f(\varphi) = C \mp \operatorname{tg}^2\vartheta \cdot \varphi .$$

Diese Kurven führen, wenn $\operatorname{tg}^2\vartheta$ eine rationale Zahl ist, auf die sogenannten Torusknoten: $m\varphi \pm m'\psi = \text{const}$. mit ganzem m und m'. Die Kurve $m\varphi \pm m'\psi = \text{const}$. ist bei ganzem m und m' in sich geschlossen und windet sich m'-mal im Äquator und m-mal im Meridian. Ist $\operatorname{tg}^2\vartheta$ nicht rational, so gibt es unendlich viele Windungen im Äquator und im Meridian, die Kurve ist nicht mehr geschlossen.

Eine Wellenfront $\psi = \varphi$ auf dem Torus $\vartheta = \text{const}$ schneidet einen Wellenstrahl in mehreren Punkten, wie sich sehr leicht zeigen läßt. Ein Mikrobeobachter, der auf dem Torus ϑ längs der Wellenfront wandert, trifft nach einiger Zeit wieder auf den gleichen Wellenstrahl. Wenn $\operatorname{tg}^2\vartheta$ rational ist, so trifft er nur endlich oft mal mit dem gleichen Strahl zusammen, ist $\operatorname{tg}^2\vartheta$ nicht rational, so begegnet er unendlich oft mal dem gleichen Wellenstrahl.

Die Welle mit $m' = 0$, $m = n$

$\Phi = \sin^m\vartheta \cdot e^{\pm i m\varphi} \cdot e^{-2\pi i \nu t}$, diese Gestalt hat die Welle.

Die Wellenfronten auf dem Torus $\vartheta = \text{const}$ sind die Kurven $\varphi = \text{const}$, also die Meridiane, die einfach mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um die ζ-Achse rotieren. Bei großem m verschwindet Φ bis auf den Torus $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, d. h. bis auf die nächste Umgebung des Kreises K_0 in der ξ, η-Ebene: $\xi^2 + \eta^2 = 4$, $\zeta = 0$.

Ein Mikrobeobachter sieht ebene Wellen, die entlang K_0 laufen und seitlich bei hohem m rasch abklingen. Die Wellenflächen sind im R_3 einfach das Ebenenbüschel durch die ζ-Achse, im R_4 sind es Großkugeln.

Die Welle mit $m = 0$, $m' = n$

$\Phi = \cos^{m'}\vartheta \cdot e^{\pm i m' \psi} \cdot e^{-2\pi i \varkappa t}$, so läßt sich die Welle schreiben.

Die Wellenfronten auf dem Torus sind jetzt die Parallelkreise $\psi = \text{const}$. Die Bewegung ist Rotation um den Kreis $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ oder $\xi^2 + \eta^2 = 4$, $\zeta = 0$.

Φ_{max} liegt auf der ζ-Achse ($\vartheta = 0$). Ein Mikrobeobachter auf ihr sieht ebene Wellen in der Achsenrichtung laufen, die bei hohem m' seitlich rasch abklingen; er macht also ganz die gleichen Beobachtungen wie im früheren Fall der Beobachter auf dem Kreis K_0.

Die Wellenfläche im R_4 ist gegeben durch:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \sin\varphi \sin\vartheta \\ x_2 &= \cos\varphi \sin\vartheta \\ x_3 &= -\sin\psi_0 \cos\vartheta \\ x_4 &= -\cos\psi_0 \cos\vartheta \end{aligned}\right| \quad \left.\begin{aligned} & x_3 \cos\psi_0 - x_4 \sin\psi_0 = 0 \\ & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 . \end{aligned}\right|$$

Als Schnitt einer Hyperebene mit der Hyperkugel erhalten wir für die Wellenfläche eine Großkugel, deren Bild im $R_3(\xi, \eta, \zeta)$ auch wieder eine Kugel sein muß. Für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich, daß alle Wellenflächen sich in dem Kreis $\xi^2 + \eta^2 = 4$, $\zeta = 0$ schneiden. Dies ist einleuchtend, da die Wellenflächen und unsere Torusflächen ein orthogonales Flächensystem bilden.

Beide Fälle, $m = 0$ und $m' = 0$, sind wegen der Gleichberechtigung von φ und ψ vollkommen äquivalent und haben nur in der stereographischen Projektion scheinbar verschiedene Bedeutung.

Der allgemeinere Fall:

m und $m' \neq 0$, aber $m + m' = n$

Die Lösung lautet:

$$\Phi = \sin^m\vartheta \cos^{m'}\vartheta \cdot e^{i(\pm m\varphi \pm m'\psi)} \cdot e^{-2\pi i \varkappa t} .$$

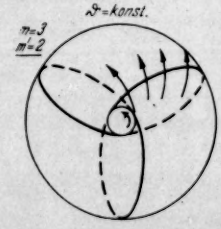


Fig. 3.

Die Wellenfronten auf dem Torus $\vartheta = \text{const}$ sind die Kurven $m\varphi \pm m'\psi = \text{const}$, also die sogenannten Torusknoten, die sich m-mal im Meridian und m'-mal im Parallelkreis winden (z. B. $m = 3$, $m' = 2$; Fig. 3).

Die Wellenstrahlen zur Wellenfront

$$\psi = \pm \frac{m}{m'} \varphi + c_1$$

Setze ich $\lambda = \frac{m}{m'}$ und sei die Gleichung der Strahlen gegeben durch $\psi = f(\varphi)$, so erhalten wir für die beiden Tangentenvektoren:

$$t_1 \left\{\begin{aligned} & \cos\varphi \sin\vartheta \\ & -\sin\varphi \sin\vartheta \\ & \mp \lambda \cos\lambda\varphi \cos\vartheta \\ & \lambda \sin\lambda\varphi \cos\vartheta \end{aligned}\right. \qquad t_2 \left\{\begin{aligned} & \cos\varphi \sin\vartheta \\ & -\sin\varphi \sin\vartheta \\ & -f' \cos f \cos\vartheta \\ & f' \sin f \cos\vartheta . \end{aligned}\right.$$

Das skalare Produkt muß wieder verschwinden:

$$t_1 \cdot t_2 = \sin^2\vartheta \pm \lambda f' \cdot \cos^2\vartheta = 0$$

$$\psi = \mp \frac{m'}{m} \operatorname{tg}^2\vartheta \cdot \varphi + c_2 .$$

Auf dem Torus $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ sind die Orthogonaltrajektorien zur Kurve $m\varphi \pm m'\psi = \text{const}$ gegeben durch $m\psi \mp m'\varphi = \text{const}$.

Auf dem Torus mit $\operatorname{tg}^2\vartheta = \frac{m}{m'}$, auf dem, wie man sehr leicht zeigen kann, auch das Maximum der Erregung liegt, sind die Strahlen zur Wellenfront $m\varphi \pm m'\psi = \text{const}$ einfach die Kreise $\varphi \mp \psi = \text{const}$. Auch hier trifft ein Mikrobeobachter öfters auf den gleichen Wellenstrahl, wenn er sich seitlich längs der Wellenfront bewegt.

Stehende Wellen: $m = 0$, $m' = 0$

$\Theta(x)$ erfüllt dann die Gleichung:

$$(1 - x^2)\Theta'' - 2x\Theta' + \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2} + 1\right)\Theta = 0$$

und die Erregung ergibt sich zu:

$$\Phi = P_{\frac{n}{2}}(x) \cdot e^{-2\pi i \varkappa t} = P_{\frac{n}{2}}(\cos 2\vartheta) \cdot e^{-2\pi i \varkappa t} .$$

Der Index $\frac{n}{2}$ ist natürlich wieder ganzzahlig. Für $x = \pm 1$ oder $\vartheta = 0, \frac{\pi}{2}$ ist $P_{\frac{n}{2}}(\pm 1) = 1$, also befinden sich Erregungsmaxima auf der ζ-Achse und auf dem Kreis $\xi^2 + \eta^2 = 4$, $\zeta = 0$.

Zur Bestimmung der weiteren Maxima von Φ haben wir die Wurzeln von $P'_{\frac{n}{2}}(x) = 0$ zu untersuchen. Da $P^1_{\frac{n}{2}}(x) = \sqrt{1 - x^2} \cdot P'_{\frac{n}{2}}(x)$, so fallen,

abgesehen von $x = \pm 1$, die Nullstellen von $P_n'(x)$ und von $P_n^1(x)$ zusammen; für $P_n^1(x)$ gibt es aber bei großem Index $\frac{n}{2}$ eine einfache Näherungsformel[1]).

Es läßt sich durch ganz einfache Ausrechnungen unter Berücksichtigung der Intensitätsverhältnisse zeigen, daß bei großem $\frac{n}{2}$ für die praktisch nicht verschwindenden Erregungsmaxima nur ganz wenige Torusflächen (ungefähr je 10) in nächster Umgebung der Großkreise $\vartheta = 0$ (ζ-Achse) und $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ (der Kreis $\xi^2 + \eta^2 = 4$, $\zeta = 0$) in Betracht kommen. Der Intensitätsabfall erfolgt sehr rasch.

VI. Abschnitt

Der sphärische Raum

Der Ort des physikalischen Geschehens ist wieder die Hypersphäre der vierdimensionalen Kugel $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2$, aber der Unterschied zwischen der zylindrischen und der sphärischen Welt besteht in einer ortsabhängigen Zeitmessung. Die Verhältnisse sind charakterisiert durch:

$$ds^2 = -R^2 d\chi^2 - R^2 \sin^2\chi\, d\vartheta^2 - R^2 \sin^2\chi \sin^2\vartheta\, d\varphi^2 + \cos^2\chi\, dt^2 \ldots (c = 1),$$

wenn ich auf der Hypersphäre Polarkoordinaten φ, ϑ, χ einführe. Die Großkugel $x_4 = 0$ oder $\chi = \frac{\pi}{2}$ spielt die Rolle eines Horizontes, wo für einen im Ursprung befindlichen Beobachter alle Naturprozesse zum Stillstand kommen.

Setze ich $r = R \sin\chi$, also

$$\sin\chi = \frac{r}{R},\quad \cos^2\chi = 1 - \frac{r^2}{R^2},\quad dr = R\cos\chi\, d\chi,$$

so folgt:

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1 - k^2 r^2} - r^2 d\vartheta^2 - r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2 + (1 - k^2 r^2)\, dt^2,$$

wenn ich $\frac{1}{R}$ mit k bezeichne.

Um eine möglichst einfache Gestalt von ds^2 zu bekommen, wende ich eine von Robertson[2]) gegebene Transformation an, die auf die Größen r, t wirkt und φ, ϑ unverändert läßt:

$$\bar r = \frac{r}{\sqrt{1 - k^2 r^2}}\, e^{-kt};\quad \bar t = t + R \lg \sqrt{1 - k^2 r^2}.$$

$\bar r, \bar t$ sind für jedes Wertepaar r, t eindeutig und reell bestimmt, da ja $0 \leqq r < R$. Die Umkehrung dieser Transformation läßt sich so bestimmen:

$$r = \bar r \cdot \sqrt{1 - k^2 r^2}\cdot e^{k\bar t} = \bar r \cdot e^{k\bar t};$$
$$t = \bar t - R \lg \sqrt{1 - k^2 \bar r^2}\cdot e^{2k\bar t}.$$

Die Vorgabe von $\bar r, \bar t$ ist aber nicht willkürlich, da eine $(1,1)$-deutige Abbildung nur besteht, wenn

$$1 - k^2 \bar r^2 e^{2k\bar t} > 0 \qquad \text{oder} \qquad \bar r < R \cdot e^{-k\bar t}.$$

$$dr = e^{k\bar t}\cdot (d\bar r + k\bar r\, d\bar t);\quad dt = \frac{d\bar t + k\bar r e^{2k\bar t}\cdot d\bar r}{1 - k^2 \bar r^2 \cdot e^{2k\bar t}}.$$

Verwendet man diese Differentiale, so erhält man:

$$-\frac{dr^2}{1 - k^2 r^2} + (1 - k^2 r^2)\, dt^2 = -e^{2k\bar t}\cdot d\bar r^2 + d\bar t^2$$

und somit folgt für ds^2:

$$ds^2 = -e^{2k\bar t}(d\bar r^2 + \bar r^2 d\vartheta^2 + \bar r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) + d\bar t^2.$$

Faßt man $\bar r, \vartheta, \varphi$ als Polarkoordinaten eines R_3 auf, also:

$$\left.\begin{aligned} x &= \bar r \sin\vartheta\cos\varphi \\ y &= \bar r \sin\vartheta \sin\varphi \\ z &= \bar r \cos\vartheta, \end{aligned}\right\}$$

so folgt diese besonders einfache Form unseres Linienelementes:

$$ds^2 = -e^{2k\bar t}\cdot (dx^2 + dy^2 + dz^2) + d\bar t^2.$$

Ich schreibe jetzt r, t statt $\bar r, \bar t$ und leite in bekannter Weise aus ds^2 die Lichtwellengleichung ab.

$$e^{kt}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{3kt}\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = 0$$

oder:

$$\Delta\Phi - e^{2kt}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 3k\,\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = 0.$$

Diese Wellengleichung läßt sich integrieren durch den Ansatz:

$$\Phi = \Phi_0(x,y,z)\cdot T(t).$$

---

1) Jahnke-Emde, Funktionentafeln, 1933, S. 183.

2) Phil. Mag. 5, 835, 1928.

Wir erhalten somit durch Trennung der Variablen 2 Gleichungen:

$$\Delta\Phi_0 + \varkappa^2\Phi_0 = 0\,, \tag{1}$$

$$\frac{d^2T}{dt^2} + 3kt\frac{dT}{dt} + \varkappa^2 e^{-2kt}T = 0\,. \tag{2}$$

1. $\Delta\Phi_0 + \varkappa^2\Phi_0 = 0$. Dies ist die bekannte Amplitudengleichung im R_3; sie ist leicht integrierbar durch Einführung von Polarkoordinaten: r, ϑ, φ.

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi_0}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial\Phi_0}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\varphi^2}\right] + \varkappa^2\Phi_0 = 0\,.$$

Wir machen natürlich den Ansatz:

$$\Phi_0(r,\vartheta,\varphi) = R(r)\cdot e^{im\varphi}\cdot P_l^m(\cos\vartheta)\,,$$

und da

$$K\left(e^{im\varphi}P_l^m(\cos\vartheta)\right) + l(l+1)\,e^{im\varphi}\cdot P_l^m(\cos\vartheta) = 0\,,$$

so folgt als Gleichung für $R(r)$:

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) - l(l+1)R\right] + \varkappa^2 R = 0$$

oder

$$r^2R'' + 2rR' + \left(\varkappa^2r^2 - l(l+1)\right)R = 0\,.$$

Diese Differentialgleichung läßt sich auf die Besselsche zurückführen durch den Ansatz: $R(r) = r^\alpha S(r)$, und nach Division durch r^α folgt:

$$r^2S'' + 2(\alpha+1)rS' + \left[\varkappa^2r^2 - l(l+1) + \alpha(\alpha+1)\right]S = 0\,.$$

Setzt man $\alpha = -\frac{1}{2}$, was soviel bedeutet wie $R(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}\cdot S(r)$ so erhält man schon die gewünschte Besselsche Differentialgleichung:

$$r^2S'' + rS' + \left[\varkappa^2r^2 - (l+\tfrac{1}{2})^2\right]S = 0\ldots$$

$$S(r) = \mathfrak{Z}_{l+\frac{1}{2}}(\varkappa r)\,.$$

Die Lösung $R(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}\cdot\mathfrak{Z}_{l+\frac{1}{2}}(\varkappa r)$ ist im ganzen Raum, der durch die Polarkoordinaten aufgespannt wird, in r analytisch (auch für $r = 0$).

$$\Phi_0(r,\vartheta,\varphi) = e^{im\varphi}\cdot P_l^m(\cos\vartheta)\cdot\frac{1}{\sqrt{r}}\cdot\mathfrak{Z}_{l+\frac{1}{2}}(\varkappa r)\,.$$

2. Auch die Gleichung des Zeitfaktors $T(t)$ läßt sich auf eine Besselsche zurückführen, wenn man auf $T'' + 3kT' + \varkappa^2e^{-2kt}T = 0$ zunächst die Transformation $\tau = e^{-kt}$ darauf ausübt und dann noch einmal transformiert. Schreibt man $\frac{dT}{dt} = T'$ und $\frac{dT}{d\tau} = \dot{T}$, so folgt schließlich diese Gestalt meiner Differentialgleichung:

$$\tau\ddot{T} - 2\dot{T} + \left(\frac{\varkappa}{k}\right)^2\tau T = 0\,.$$

Setzt man jetzt $T(\tau) = \tau^\beta\cdot V(\tau)$, so folgt nach Division durch $\tau^{\beta-1}$

$$\tau^2V'' + 2\tau(\beta-1)V' + \left[\frac{\varkappa^2}{k^2}\tau^2 + \beta(\beta-3)\right]V = 0\,.$$

$\beta = \frac{3}{2}$ liefert dann die bekannte Besselsche Differentialgleichung:

$$\tau^2\frac{d^2V}{d\tau^2} + \tau\frac{dV}{d\tau} + \left(\frac{\varkappa^2}{k^2}\tau^2 - \frac{9}{4}\right)V = 0$$

mit der Lösung: $V = \mathfrak{Z}_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\varkappa}{k}\tau\right)$. Für den Zeitfaktor ergibt sich somit:

$$T(t) = e^{-\frac{3}{2}kt}\cdot\mathfrak{Z}_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\varkappa}{k}e^{-kt}\right).$$

Schreibt man r und t wieder mit Querstrichen, so lautet meine Welle im de-Sitter-Raum:

$$\Phi(\bar{r},\vartheta,\varphi,\bar{t}) = e^{im\varphi}\,P_l^m(\cos\vartheta) \times\frac{1}{\sqrt{\bar{r}}}\cdot\mathfrak{Z}_{l+\frac{1}{2}}(\varkappa\bar{r})\cdot e^{-\frac{3}{2}k\bar{t}}\cdot\mathfrak{Z}_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\varkappa}{k}e^{-k\bar{t}}\right).$$

Nun ist $\bar{r} = \frac{r}{\sqrt{1-k^2r^2}}\cdot e^{-kt} = R\,\mathrm{tg}\,\chi e^{-kt}$ sowie $e^{-k\bar{t}} = \frac{e^{-kt}}{\cos\chi}$, und setzt man $P = e^{im\varphi}\,P_l^m(\cos\vartheta)$, so wird Φ nach Fortlassen eines belanglosen Faktors $\frac{1}{\sqrt{R}}$ zum Ausdruck:

$$\Phi(\chi,\vartheta,\varphi,t) = P(\vartheta,\varphi)\cdot\frac{e^{-kt}}{\sqrt{\sin\chi\cdot\cos\chi}}\cdot\mathfrak{Z}_{l+\frac{1}{2}}\left(\varkappa R\,\mathrm{tg}\,\chi e^{-kt}\right)\cdot\mathfrak{Z}_{\frac{3}{2}}\left(\varkappa R\frac{e^{-kt}}{\cos\chi}\right).$$

Nun lassen sich alle halbzahligen Besselfunktionen auf Winkelfunktionen zurückführen:

$$\mathfrak{Z}_{l+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\left[A_l\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\sin x + B_l\left(\frac{1}{x}\right)\cos x\right],$$

wo A_l und B_l Polynome in $\frac{1}{x}$ vom Grad l sind.

Wir wollen nun darangehen, unsere Wellen zu diskutieren und werden zu diesem Zweck spezielle Gebiete des Raumes und besonders einfache Wellen (mit niedriger Quantenzahl l) betrachten.

Das Verhalten von Φ am Horizont $\chi = \frac{\pi}{2}$

Bei der Annäherung $\chi \to \frac{\pi}{2}$ gehen die Argumente in beiden Besselfunktionen über alle Grenzen, wenn die Zeit konstant gehalten wird. Wir verwenden daher Näherungsformeln für Besselfunktionen bei großem Argument[1]). Wenn $x \gg 1$, so ist:

$$\mathfrak{J}_{l+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \begin{cases} \cos x \ldots l = \text{ungerade} \\ \sin x \ldots l = \text{gerade} . \end{cases}$$

Setze ich $x = \frac{1}{\cos\chi}$, so geht bei Annäherung an den Horizont $\chi = \frac{\pi}{2}$ unser $x \to \infty$ und ich muß das Verhalten untersuchen von:

$$\Phi = \frac{P e^{-kt}}{\cos\chi} \cdot \mathfrak{J}_{l+\frac{1}{2}}\left(\frac{\varkappa}{k} e^{-kt} \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos^2\chi} - 1}\right) \cdot \mathfrak{J}_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\varkappa}{k} e^{-kt} \cdot \frac{1}{\cos\chi}\right); \quad \text{und da } \sqrt{x^2 - 1} \doteq x,$$

so folgt:

$$\Phi \doteq \frac{2}{\pi} P(\vartheta,\varphi) \cdot \frac{k}{\varkappa} \cdot \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix}\left(\frac{\varkappa}{k} \frac{e^{-kt}}{\cos\chi}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varkappa}{k} \frac{e^{-kt}}{\cos\chi}\right).$$

Bei Annäherung an den Horizont ist zwar kein Grenzwert von Φ vorhanden, aber Φ bleibt beschränkt durch den Ausdruck:

$$|\Phi| \leqq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{k}{\varkappa} \cdot |P(\vartheta,\varphi)| .$$

Je näher man dem Horizont ist, desto größer ist $\frac{1}{\cos\chi}$ und da für $t \ll 1$ gesetzt werden kann: $e^{-kt} \doteq 1 - kt$, so bekommt man folgende Schwingungen:

$$\Phi \doteq \frac{2k}{\pi\varkappa} \cdot P(\vartheta,\varphi) \cdot \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix}\left(\frac{\varkappa(1-kt)}{k\cos\chi}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varkappa(1-kt)}{k\cos\chi}\right),$$

die Frequenz ist um so größer, je näher der Aufpunkt dem Horizonte ist.

Im Ursprung $\chi = 0$ verschwindet Φ, da $\lim_{\chi\to 0} \frac{1}{\sin\chi} \cdot \mathfrak{J}_{l+\frac{1}{2}}\left(c \cdot \operatorname{tg}\chi\right) = 0$, außer wenn $l = 0$.

Der Sonderfall der Welle mit $l = 0$

Da $P_0^0(\vartheta,\varphi) \equiv 1$, so ist die Welle eine Kugelwelle.

$$\Phi = \frac{e^{-kt}}{\sqrt{\sin\chi \cdot \cos\chi}} \mathfrak{J}_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\varkappa}{k} \operatorname{tg}\chi e^{-kt}\right) \cdot \mathfrak{J}_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\varkappa}{k} \frac{e^{-kt}}{\cos\chi}\right).$$

Führt man die Besselfunktionen auf die Winkelfunktionen zurück, so ergibt sich für die Erregung:

$$\Phi = \frac{2k}{\pi\varkappa} \cdot \frac{1}{\sin\chi} \cdot \sin\left(\frac{\varkappa}{k} \operatorname{tg}\chi e^{-kt}\right) \cdot \left[\frac{k}{\varkappa} \cos\chi \cdot e^{kt} \cdot \sin\left(\frac{\varkappa}{k} \frac{e^{-kt}}{\cos\chi}\right) - \cos\left(\frac{\varkappa}{k} \frac{e^{-kt}}{\cos\chi}\right)\right].$$

Das Verhalten der Welle $l = 0$ im Ursprung

Wir haben den Grenzwert von Φ bei Annäherung an den Horizont zu untersuchen:

$$\lim_{\chi\to 0} \frac{1}{\sin\chi} \cdot \sin\left(\frac{\varkappa}{k} \operatorname{tg}\chi e^{-kt}\right) = \frac{\varkappa}{k} e^{-kt}.$$

Ich streiche belanglose Faktoren und erhalte dann:

$$\Phi_{\chi=0} = \sin\left(\frac{\varkappa}{k} e^{-kt}\right) - \frac{\varkappa}{k} e^{-kt} \cdot \cos\left(\frac{\varkappa}{k} e^{-kt}\right)$$

$0 < t \ll 1 \ldots \Phi_{\chi=0}$

$$\doteq \sin\left(\frac{\varkappa}{k}(1-kt)\right) - \frac{\varkappa}{k}\cos\left(\frac{\varkappa}{k}(1-kt)\right).$$

1) Jahnke-Emde, Funktionentafeln, 1933, S. 203.

Wir erhalten also eine stehende Welle, die harmonisch ist.

$$\underline{t \gg 1 \ldots} \Phi_{\chi=0} \doteq \frac{1}{3}\frac{\varkappa^3}{k^3} e^{-3kt}.$$

Die Erregung klingt also exponentiell ab.

Das Verhalten der Welle $l = 0$ in beliebigen Punkten $0 < \chi < \frac{\pi}{2}$

$$\underline{0 < t \ll 1 \ldots} \Phi \doteq \frac{\sin[\varkappa \operatorname{tg} \chi (R-t)]}{\sin \chi} \times \left[\frac{\varkappa}{k}\cos\chi \cdot \sin\frac{\varkappa(R-t)}{\cos\chi} - \cos\frac{\varkappa(R-t)}{\cos\chi}\right].$$

Dies ist eine stehende, harmonische (nicht streng) Schwingung mit Frequenzen, die um so größer sind, je näher die betrachtete Stelle dem Horizont liegt.

$$\underline{t \gg 1 \ldots} \Phi \doteq \frac{\varkappa^3}{3k^3} \cdot \frac{e^{-3kt}}{\cos^3\chi}.$$

Der Abfall der Welle ist wieder exponentiell, und zwar ist die Intensität der Welle im Ursprung am geringsten.

Aus obiger Formel folgt nicht, daß Φ bei Annäherung an den Horizont über alle Grenzen geht, wie sich wegen $\cos\chi \to 0$ ergeben würde, denn diese Näherungsformel wurde unter der Voraussetzung abgeleitet, daß $\frac{e^{-kt}}{\cos\chi} \ll 1$, d. h. aber, es darf nicht ein sehr großes t genommen und dann mit $\chi \to \frac{\pi}{2}$ gegangen werden. Dann stimmt diese Näherungsformel nicht mehr, und Φ bleibt ja auch beschränkt, wie oben gezeigt wurde.

Die Welle mit $l = 1$

$$\Phi = e^{im\psi} P_1^m(\cos\vartheta) \cdot \frac{e^{-kt}}{\sin\chi \cdot \cos\chi} \times \Im_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\varkappa}{k}\operatorname{tg}\chi e^{-kt}\right) \cdot \Im_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\varkappa}{k}\cdot\frac{e^{-kt}}{\cos\chi}\right).$$

Die Ausführung liefert ebenso wie bei Wellen mit $l > 1$ keine besonders übersichtlichen Ergebnisse. Man findet stehende Wellen, die bald verflachen und schließlich exponentiell abklingen. Im Ursprung selbst verschwindet die Erregung.

Bei allen Wellen ($l = 0, 1, 2, \ldots$) sieht ein im Ursprung sitzender Beobachter, daß die Frequenz um so größer ist und der exponentielle Abfall um so später einsetzt, je näher der Punkt dem Horizont ist.

Das Verhalten ist ungefähr gegeben durch:

$$\sin\left(\frac{\varkappa}{k}\cdot\frac{e^{-kt}}{\cos\chi}\right).$$

VII. Abschnitt

De-Sitter-Wellen in Ringkoordinaten φ, ψ, ϑ

Wir wählen die schon im zylindrischen Raum verwendeten Ringkoordinaten φ, ψ, ϑ, die dort so schöne Ergebnisse geliefert haben.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= R\sin\varphi\sin\vartheta \\ x_2 &= R\cos\varphi\sin\vartheta \\ x_3 &= -R\sin\psi\cos\vartheta \\ x_4 &= -R\cos\psi\cos\vartheta \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} 0 \leqq \varphi &\leqq 2\pi \\ -\pi \leqq \psi &\leqq \pi \\ 0 \leqq \vartheta &\leqq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Dem Horizont entspricht die Großkugel $x_4 = 0$, die in Polarkoordinaten sich bestimmt durch $\chi' = \frac{\pi}{2}$. Alle ihre Punkte sind gegeben entweder durch $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ oder $\psi = \pm\frac{\pi}{2}$.

Wenn ξ, η, ζ die cartesischen Koordinaten des Tangential-R_3 bedeuten, auf den stereographisch projiziert wurde, so entspricht der Bedingung $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ der Kreis: $\xi^2 + \eta^2 = 4$, $\zeta = 0$.

Die Flächen $\psi = \pm\frac{\pi}{2}$ sind bekanntlich Kugelkalotten durch diesen Kreis, die im Tangential-R_3 festgelegt sind durch:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= 2\sin\varphi\sin\vartheta \\ \eta &= 2\cos\varphi\sin\vartheta \\ \zeta &= \mp 2\cos\vartheta. \end{aligned}\right|$$

Daraus ergibt sich also die Gleichung der Horizontkugel zu:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 4.$$

Verlangen wir Lösungen der Wellengleichung, die nur im Innern der Horizontkugel $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 4$ regulär sind, so brauchen wir nur im offenen Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ in ψ reguläre Wellen zu bestimmen. Ich erhalte wirklich das Innere der Horizontkugel, da für $\psi = 0$ die Ordinate ζ verschwindet.

Das Linienelement der sphärischen Welt hat die Gestalt: $ds^2 = -ds_0^2 + \cos^2\chi'\, df^2$, wenn χ' der dem Polarkoordinatensystem zugehörige Winkel ist. Nach den im I. Abschnitt gegebenen Beziehungen zwischen den Polarkoordinaten φ', ϑ',

χ' und den Ringkoordinaten φ, ψ, ϑ erhält man wegen $\cos^2\chi' = \cos^2\vartheta \cdot \cos^2\psi$ diese Gestalt des Intervalles:

$$ds^2 = -R^2\sin^2\vartheta\, d\varphi^2 - R^2\cos^2\vartheta\, d\psi^2 - R^2 d\vartheta^2 + \cos^2\vartheta\cos^2\psi\, dt^2 .$$

Durch Bildung der vierdimensionalen, kovarianten Divgrad erhält man wie bisher die Wellengleichung des Lichtes.

$$\cos^2\psi\left\{\frac{1}{\cos\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\cos\psi\frac{\partial\Phi}{\partial\psi}\right)+\cos^2\vartheta\left[\frac{1}{\sin\vartheta\cos^2\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\cos^2\vartheta\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right]\right\} = R^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} .$$

Lösungen der Wellengleichung

Um Lösungen obiger Wellengleichung zu erhalten, verwendet man den Ansatz:

$$\Phi(\varphi, \psi, \vartheta, t) = P(\vartheta, \varphi)\cdot Q(\psi, t) .$$

Wenn ich zur Abkürzung setze:

$$K = \frac{1}{\sin\vartheta\cos^2\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\cos^2\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},$$

so folgt

$$\cos^2\psi\left\{\frac{1}{\cos\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\cos\psi\frac{\partial Q}{\partial\psi}\right)\cdot P+\cos^2\vartheta\cdot Q\cdot KP\right\} = R^2\cdot P\cdot\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}$$

oder

$$\left\{\cos\psi\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\cos\psi\frac{\partial Q}{\partial\psi}\right)-R^2\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}\right\}\cdot\frac{1}{\cos^2\psi}\cdot\frac{1}{Q} = -\cos^2\vartheta\frac{KP}{P} = -\lambda^2 = \text{const} .$$

Man erhält somit die beiden Differentialgleichungen:

$$\cos^2\vartheta\, KP - \lambda^2 P = 0 , \qquad \text{(I)}$$

$$\cos\psi\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\cos\psi\frac{\partial Q}{\partial\psi}\right)+\lambda^2\cos^2\psi\cdot Q - R^2\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = 0 . \qquad \text{(II)}$$

I. Zur Lösung der I. Differentialgleichung:

$$\cos^2\vartheta\, KP - \lambda^2 P = 0$$

setzen wir an: $P(\vartheta,\varphi) = e^{im\varphi}\cdot S(\vartheta)$ ... m = ganzzahlig, und da $\frac{\partial^2 P}{\partial\varphi^2} = -m^2 e^{im\varphi} S(\vartheta)$, so ergibt sich als Gleichung für S, wenn man noch mit $\sin^2\vartheta\cos^4\vartheta$ multipliziert:

$$\sin\vartheta\cos^2\vartheta\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\cos^2\vartheta\frac{dS}{d\vartheta}\right) - m^2\cos^4\vartheta S - \lambda^2\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta S = 0 .$$

Wir brauchen jetzt ein $S(\vartheta)$, das in ϑ regulär ist von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, wo eventuell eine Singularität sein darf, da dieser Kreis ja auf der Horizontkugel gelegen ist.

Die Transformation $x = \operatorname{tg}\vartheta$ liefert die Gleichung:

$$x^2(x^2+1)S'' + xS' - (\lambda^2 x^2 + m^2)S = 0 .$$

Das charakteristische Polynom für die Stelle $x = 0$: $\ldots \varrho(\varrho-1) + \varrho - m^2 = 0$ hat die Wurzeln $\varrho = \pm m$.

$S(x) = x^m\cdot\psi(x)$ liefert, wenn dann $z = -x^2$ gesetzt wird, eine Gaußsche Differentialgleichung:

$$z(1-z)\frac{d^2\psi}{dz^2} + \left[(m+1) - \left(m+\frac{1}{2}\right)z\right]\frac{d\psi}{dz} - \frac{m(m-1)-\lambda^2}{4}\psi = 0 ,$$

die gewöhnlich so geschrieben wird:

$$z(1-z)\psi'' + [c - (a+b+1)z]\psi' - ab\psi = 0 .$$

Für die Koeffizienten folgt dann:

$$\begin{array}{l|l} c = m+1 & (a+b)^2 = m^2 - m + \frac{1}{4} \\ a+b = m-\frac{1}{2} & -4ab = -(m^2-m)+\lambda^2 \\ 4ab = m(m-1)-\lambda^2 & \hline (a-b)^2 = \lambda^2 + \frac{1}{4} . \end{array}$$

Setzen wir an: $\lambda^2 = s(s+1)$, so ergibt sich $(a-b)^2 = (s+\frac{1}{2})^2$ und man kann a und b aus den Gleichungen bestimmen:

$$a = \frac{m+s}{2} ; \qquad b = \frac{m-s-1}{2} .$$

Die in $z = 0$ ($\vartheta = 0$) reguläre Lösung lautet:

$$\psi(z) = F(a, b, c; z) = F\left(\frac{m+s}{2}, \frac{m-s-1}{2}, m+1; z\right) .$$

Die Reihe für $z = -x^2$ soll aber in der ganzen Ebene konvergieren, während jede hypergeometrische Reihe den Konvergenzradius 1 hat, wenn sie nicht abbricht.

Dies ist aber dann und nur dann der Fall, wenn $\frac{m-s-1}{2}$ ganz und negativ ist, also $m \leqq s+1$, wo s eine natürliche Zahl bedeutet. Ferner: m und s dürfen nicht gleichzeitig gerade oder ungerade sein, sonst bricht die Reihe nicht ab, was notwendig ist, wenn Regularität bis $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ verlangt wird.

$\psi(z)$ ist ein Polynom in z vom Grad $\frac{s+1-m}{2}$ und ließe sich wieder als Jacobisches Polynom anschreiben, was aber für uns belanglos ist.

$$P(\vartheta,\varphi) = e^{\pm i m \varphi} \cdot \operatorname{tg}^m \vartheta \cdot F\left(\frac{m+s}{2},\ \frac{m-s-1}{2},\ m+1;\ -\operatorname{tg}^2\vartheta\right) = e^{\pm i m \varphi} \cdot S_{m,s}(\operatorname{tg}\vartheta).$$

Bei Annäherung an den Kreis $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ geht $P(\vartheta,\psi)$ (außer $P \equiv 1$) über alle Grenzen.

II. Die Gleichung für $Q(\psi, t)$

$$\cos\psi \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\cos\psi \frac{\partial Q}{\partial\psi}\right) + s(s+1)\cos^2\psi Q = R^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}.$$

Durch den Produktansatz $Q(\psi,t) = A(\psi)\cdot B(t)$ läßt sich obige Gleichung integrieren, wenn ich die bekannte Trennung der Variablen durchführe:

$$R^2 \frac{d^2 B}{dt^2} = -\nu^2 B = 0 \ldots B(t) = e^{\pm \nu k t}.$$

Setzt man noch an: $\psi = \alpha + \frac{\pi}{2}$, so folgt für A die Gleichung:

$$\frac{1}{\sin\alpha}\frac{d}{d\alpha}\left(\sin\alpha \frac{dA}{d\alpha}\right) + \left[s(s+1) - \frac{\nu^2}{\sin^2\alpha}\right] A = 0.$$

Setzt man ν als reell voraus, zu dieser Annahme ist man aus Gründen der Regularität gezwungen[1]), so ist dies die Gleichung der zugeordneten Kugelfunktion:

$$A = \sin^\nu\alpha \frac{d^\nu P_s(\cos\alpha)}{d(\cos\alpha)^\nu} = \cos^\nu\psi \cdot \frac{d^\nu P_s(\sin\psi)}{d(\sin\psi)^\nu},$$

$\nu \leqq s$ und ν ganz und positiv:

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, s-1, s.$$

Die Welle sieht in ihrer vollendeten Gestalt so aus:

$$\Phi(\varphi,\vartheta,\psi,t) = e^{\pm i m\varphi} \cdot S_{m,s}(\operatorname{tg}\vartheta) \times \cos^\nu\psi \cdot P_s^{(\nu)}(\sin\psi) \cdot e^{-\nu k t}.$$

In diesem Fall (ν = reell) haben wir keine Schwingung, sondern zeitlich exponentielles Verhalten. Die Welle geht bei Annäherung an den Nulltorus $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ über alle Grenzen, ist aber auf jedem Torus $\vartheta < \frac{\pi}{2}$ regulär.

1) Bei imaginärem ν erhält man Wellen mit beliebiger Frequenz, jedoch treten dann Singularitäten am Horizont auf; die Frequenzen sind nicht gequantelt.

Knotenflächen sind die Ebenen durch die ζ-Achse, entsprechend dem Faktor $e^{\pm i m\varphi}$; die Nullstellen des Polynoms $S(\operatorname{tg}\vartheta)$ liefern einzelne Torusflächen, die Nullstellen der zugeordneten Kugelfunktion gewisse Kugeln, auf denen ebenfalls Φ verschwindet.

VIII. Abschnitt

„Ebene" Wellen im de-Sitter-Raum

In einem Spezialfall kann ich die Gleichung für $Q(\psi,t)$ vollständig integrieren, ohne erst den Produktansatz mit Trennung der Variablen anzuwenden.

Im Falle $\lambda^2 = s(s+1) = 0$ läßt sich die Gleichung (II): $\cos\psi \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\cos\psi \frac{\partial Q}{\partial\psi}\right) = R^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}$ auf die Saitengleichung transformieren durch den Ansatz:

$$\cos\psi \frac{\partial}{\partial\psi} = \frac{\partial}{\partial\omega};\quad \omega = \int \frac{d\psi}{\cos\psi} = \log\operatorname{tg}\left(\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Diese Transformation ist regulär, solange $0 < \frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ oder $-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$. Dies ist aber gerade der Variabilitätsbereich, der dem Innern der Horizontkugel entspricht, und meine Differentialgleichung nimmt dann mit $k = \frac{1}{R}$ die bekannte Gestalt an:

$$k^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial\omega^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = 0$$

mit der allgemeinen Lösung:

$$Q(\omega,t) = f_1(\omega + kt) + g_1(\omega - kt).$$

$P(\vartheta,\varphi)$, der zweite Faktor von Φ, kann im Falle $s = 0$ nur diese zwei Formen annehmen: $P \equiv 1$ und $P = e^{\pm i\varphi}\cdot \operatorname{tg}\vartheta$.

Da nun der letztere Ausdruck bei Annäherung an den Nulltorus $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ über alle Grenzen wächst, so wollen wir nur $P \equiv 1$ verwenden und haben

somit diese spezielle Form einer Welle im sphärischen Raum herausgegriffen:

$$\Phi_0 = f\left(kt \pm \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Diskussion der Welle

$$\Phi_0 = f\left(kt - \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Diese Welle läuft offenbar auf dem Torus $\vartheta = \text{const}$, da auf diesem die Punkte des Meridians $\varphi = \varphi_0$ durch Variation von ψ erhalten werden (Fig. 4).

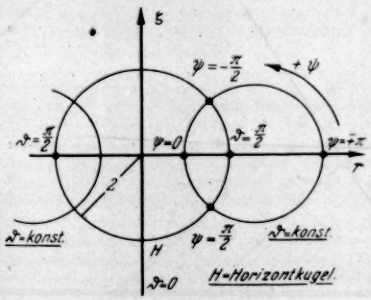


Fig. 4.

Wir bestimmen nun die Phasengeschwindigkeit $\frac{d\psi}{dt} = v$ der Welle Φ_0:

$$kt - \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \text{const}$$

oder

$$t = R \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \text{const}$$

$$\frac{dt}{d\psi} = \frac{1}{v} = \frac{R}{\cos\psi}; \qquad v = k \cdot \cos\psi.$$

$$v\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0; \qquad v(0) = k; \qquad v\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Die Welle läuft in Richtung von $+\psi$, ist in der ξ, η-Ebene am schnellsten und nimmt in ihrer Phasengeschwindigkeit bei Annäherung an den Horizont bis auf Null ab.

$$\Phi_0 = g\left(kt + \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

hat die entgegengesetzte Laufrichtung.

Wir wollen nun begründen, warum wir dieser Welle $\Phi_0 = f\left(kt \pm \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$ die Bezeichnung ebene Welle des de-Sitter-Raumes gegeben haben: Es wird sich herausstellen, daß sich die allgemeine Erregung des sphärischen Raumes als Superposition eben dieser Wellen Φ_0 darstellen läßt, so wie jede beliebige Erregung des gewöhnlichen (euklidischen) Raumes als Überlagerung der ebenen Wellen aufgefaßt werden kann.

Nun hat obige Welle Φ_0 noch eine spezielle Lage, da sie zur ζ-Achse symmetrisch ist. Um die Gleichung der Welle in allgemeiner Lage zu finden, gehen wir von den Ringkoordinaten wieder zu den Polarkoordinaten φ, ϑ', χ' des $R_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$ über.

Ich muß also zunächst den Ausdruck $\operatorname{tg}\left(\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ auf Polarkoordinaten umschreiben:

Der Übergang von $\operatorname{tg}\alpha$ zu $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ wird gegeben durch

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}}{\operatorname{tg}\alpha};$$

in unserem Fall ergibt dies also:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1 \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) + 1}}{\operatorname{tg}\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Da nach den Transformationsformeln des I. Abschnittes die Beziehung besteht:

$$\operatorname{tg}\psi = \cos\vartheta' \cdot \operatorname{tg}\chi',$$

so erhält man:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\vartheta' \cdot \operatorname{tg}\chi'\left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{\cot^2\chi'}{\cos^2\vartheta'}}\right).$$

Da nun $-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$ und somit $\operatorname{tg}\left(\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) > 0$, so folgt für die Wurzel in der Klammer nur das positive Vorzeichen:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\chi'\cos\vartheta' + \sqrt{\operatorname{tg}^2\chi'\cos^2\vartheta' + 1}.$$

Φ_0 nimmt dann die Gestalt an:

$$\Phi_0 = f\left[kt \pm \lg\left(\operatorname{tg}\chi'\cos\vartheta' + \sqrt{\operatorname{tg}^2\chi'\cos^2\vartheta' + 1}\right)\right].$$

Meine Welle Φ_0 hat nun infolge ihrer Symmetrie um die ζ-Achse noch eine spezielle Lage; um die Welle in allgemeiner Lage zu bekommen, muß ich sie auf ein so verdrehtes Koordinatensystem $\bar{S}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)$ beziehen, daß bei der

Drehung der Horizont $\chi' = \frac{\pi}{2}$ oder $x_4 = 0$ (Großkugel) in sich übergeht. Wenn die Drehung des Koordinatensystems durch die Transformation $(x) = \mathfrak{A} \cdot (\bar{x})$ vermittelt wird, so folgt dann diese Gestalt der orthogonalen Matrix:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bedeuten $\bar{\varphi}$, $\bar{\vartheta}$, $\bar{\chi}$ die Polarkoordinaten des gedrehten Systems $\bar{S}$, so erhält man unter Berücksichtigung von $\chi' = \bar{\chi}$ wegen $x_4 = \bar{x}_4$ schließlich diese Transformation von x_3:

$$x_3 = R\sin\chi'\cos\vartheta' = a_{31}R\sin\bar{\chi}\sin\bar{\vartheta}\sin\bar{\varphi}$$
$$+ a_{32}R\sin\bar{\chi}\sin\bar{\vartheta}\cos\bar{\varphi} + a_{33}R\sin\bar{\chi}\cos\bar{\vartheta}$$

oder

$$\cos\vartheta' = \alpha\cdot\sin\bar{\vartheta}\sin\bar{\varphi} + \beta\cdot\sin\bar{\vartheta}\cos\bar{\varphi}$$
$$+ \gamma\cdot\cos\bar{\vartheta} \ldots \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1 .$$

Nach Multiplikation mit $\operatorname{tg}\chi'$ erhält man:

$$\cos\vartheta'\operatorname{tg}\chi' = \alpha\cdot\operatorname{tg}\bar{\chi}\sin\bar{\vartheta}\sin\bar{\varphi}$$
$$+ \beta\cdot\operatorname{tg}\bar{\chi}\sin\bar{\vartheta}\cos\bar{\varphi} + \gamma\cdot\operatorname{tg}\bar{\chi}\cos\bar{\vartheta} .$$

Setzt man dies oben in Φ_0 ein, so hat man unsere spezielle Welle in allgemeinster Lage.

Fasse ich $\operatorname{tg}\bar{\chi} = r$, $\bar{\vartheta}$, $\bar{\varphi}$ als Polarkoordinaten eines $R_3(x, y, z)$ auf, so hat man die Hyperkugelfläche auf einen R_3 abgebildet; ist dort $\mathfrak{r}(x,y,z)$ der Ortsvektor und $\mathfrak{s}(\alpha, \beta, \gamma)$ ein Einheitsvektor, so ist der obige Ausdruck $\cos\vartheta'\operatorname{tg}\chi' = \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{s}$ und daher:

$$\Phi_0 = f(kt \pm \lg(\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{s} + \sqrt{(\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{s})^2+1}))$$
$$= f(kt \pm \operatorname{Ar}\operatorname{Sin}(\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{s})),$$

da ja

$$\operatorname{Ar}\operatorname{Sin} x = \lg(x + \sqrt{x^2+1}) .$$

Diese Welle spielt nun, wie oben bereits erwähnt, insofern eine ähnliche Rolle wie die ebene Welle des euklidischen R_3, als sich die allgemeine Erregung des de-Sitter-Raumes als Superposition eben dieser Wellen darstellen läßt.

Ich „zerlege" meine beliebige Erregung $\Phi(\tau, t)$ in eine Summe: $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$.

1. $\Phi_1(\tau, 0) = \Phi(\tau, 0)$, $\dot{\Phi}_1(\tau, 0) \equiv 0$ | 2. $\Phi_2(\tau, 0) \equiv 0$, $\dot{\Phi}_2(\tau, 0) = \dot{\Phi}(\tau, 0)$.

1. Wenn der Einheitsvektor $\mathfrak{s}$ angesetzt wird $\frac{\mathfrak{x}}{|\mathfrak{x}|} = \frac{\mathfrak{x}}{x}$ mit $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, x_3)$, so kann ich Φ_1 darstellen durch das Integral:

$$\Phi_1(\tau,t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} a(\mathfrak{x})\cdot\left[e^{2\pi i x \operatorname{Sin}(\operatorname{Ar}\operatorname{Sin}\tau\mathfrak{s}+kt)} + e^{2\pi i x \operatorname{Sin}(\operatorname{Ar}\operatorname{Sin}\tau\mathfrak{s}-kt)}\right] dx_1 dx_2 dx_3 .$$

Für jede Funktion $a(\mathfrak{x})$ stellt das Integral eine Welle des sphärischen Raumes dar, und wenn ich durch geeignete Wahl von $a(\mathfrak{x})$ das Integral den Anfangsbedingungen (zur Zeit $t = 0$) von Φ_1 anpassen kann, so wird Φ_1 auch wirklich dargestellt.

$$\Phi_1(\tau, 0) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} 2\,a(\mathfrak{x})\,e^{2\pi i(\tau\cdot\mathfrak{x})}\cdot dx_1 dx_2 dx_3$$

$$\dot{\Phi}_1(\tau, 0) \equiv 0 .$$

Die Funktion $a(\mathfrak{x})$ läßt sich entsprechend der Theorie der Fourierintegrale ohne weiteres eindeutig bestimmen.

2. $\Phi_2(\tau, t)$ setze ich so an:

$$\Phi_2(\tau,t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} b(\mathfrak{x}) \int_{-kt}^{+kt} dt\, e^{2\pi i x \operatorname{Sin}(\operatorname{Ar}\operatorname{Sin}\tau\mathfrak{s}+t)}\cdot dx_1 dx_2 dx_3 .$$

Zur Zeit $t = 0$ bekommt man als eindeutig erfüllbare Bedingung für $b(\mathfrak{x})$:

$$\Phi_2(\tau, 0) \equiv 0$$

$$\dot{\Phi}_2(\tau,0) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} 2\,k\,b(\mathfrak{x})\,e^{2\pi i(\tau\cdot\mathfrak{x})}\cdot dx_1 dx_2 dx_3 .$$

$\Phi(\tau, t) = \Phi_1(\tau, t) + \Phi_2(\tau, t)$ ist somit durch unsere Wellen darstellbar, so wie im gewöhnlichen R_3 die allgemeine Erregung als Superposition ebener Wellen aufgefaßt werden kann; die Bezeichnung „ebene Wellen der de-Sitter-Welt" erscheint also in diesem Sinne als gerechtfertigt.

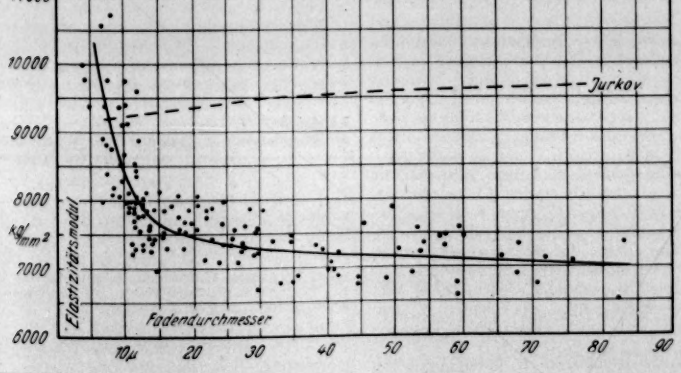
Graz, Institut für theoretische Physik, Universität.

(Eingegangen 4. März 1939)

Die Elastizitätseigenschaften von dünnen Quarzfäden

Von O. Reinkober

Die Elastizitätseigenschaften dünner Quarzfäden verhalten sich, wie ich früher mitteilte[1]), so, daß die Werte sowohl des Elastizitätsmoduls (EM.) wie die des Torsionsmoduls (TM.) mit abnehmendem Fadendurchmesser größer werden, in ähnlicher Weise, wie dies bei der Zerreißfestigkeit der Fäden schon länger bekannt ist. Besonders ausgeprägt ist das Ansteigen der Werte der Elastizitätskonstanten bei Fadendurchmessern unterhalb von 15 μ. In einer mir damals unbekannt gebliebenen, in einer russischen Zeitschrift veröffentlichten Arbeit von Jurkov[2]) wird das von mir beobachtete Verhalten des EM. der Quarzfäden nicht bestätigt, sondern ein verhältnismäßig hoher konstanter Wert des EM. als experimentell gefunden angegeben, der etwa dem der dünnsten von mir untersuchten Fäden entspricht und beim Übergang zu größeren Durchmessern den hohen Wert von etwa 9500 kg/mm² beibehält (vgl. Figur). Als Grund für die Gegensätze zwischen seinen Resultaten und den meinigen nimmt Jurkov an, daß sich bei meinen früheren Untersuchungen die Aufhängung, an der die Messung des EM. nach der Verlängerungsmethode vorgenommen wurde, unter dem Einfluß der angehängten Gewichte durchgebogen habe und so eine zu große Verlängerung des Fadens und damit infolge der steigenden Belastung ein bei den größeren Durchmessern zu kleiner EM. vorgetäuscht worden sei, da die Verlängerung des Fadens nur an einem Punkte an seinem unteren Ende beobachtet wurde. Um diesen möglichen Fehler zu vermeiden, hat Jurkov die Deformation des Fadens mit zwei Mikroskopen an je einer Stelle in der Nähe des oberen und unteren Endes gemessen. Trotzdem bei meinen Untersuchungen besonders kontrolliert worden war, daß eine Durchbiegung des Stativs bei der Belastung nicht eintrat, habe ich sie, da immerhin noch z. B. die Möglichkeit einer elastischen Verschiebung des Fadens in den Kittstellen der tragenden Haken blieb, unter Benutzung von zwei Mikroskopen, also genau nach der Jurkovschen Methode, wiederholt. Das Resultat zeigt die Figur. Man sieht wie früher die Abhängigkeit des EM. vom Durchmesser der Fäden. Von den größten untersuchten Durchmessern an steigt zunächst der EM. allmählich und unterhalb von etwa 15 μ stark an im Gegensatz zu dem Befunde von Jurkov, für den die gestrichelte Kurve der Figur die mittlere Lage der zwölf von ihm gemessenen Punkte angibt. Beim Vergleich der Verschiebungen des oberen und unteren Beobachtungspunktes zusammen mit den darüber befindlichen Fadenlängen ergab sich, daß auch hier bei der Belastung eine merkliche Durchbiegung des von mir benutzten, sehr



1) O. Reinkober, Physik. Zeitschr. **33**, 32, 1932; **38**, 112, 1937 (im Text mit II bzw. III bezeichnet).

2) S. Jurkov, Techn. Phys. of the USSR. 1. Januar 1935.

stabilen Stativs nicht eintrat, da die im Mikroskop beobachtete Verschiebung des oberen Punktes ganz auf die elastische Verlängerung des darüber liegenden kürzeren Fadenstückes entfiel. Die hier von mir gefundenen Werte des EM. liegen bei Fadendicken größer als etwa 20 μ etwas höher als die in meiner letzten Mitteilung (III, S. 118) angegebenen Werte; der Unterschied übersteigt die Fehlergrenzen. Ein Grund hierfür kann zunächst nicht angegeben werden, da auch das bei den Messungen von III benutzte Stativ, wie schon betont, auf genügende Stabilität untersucht worden war. Es bleibe dahingestellt, ob der Grund für den Unterschied in dem jetzt benutzten anderen Material zu suchen ist. Dieses umfaßte einerseits Fäden, die freundlicherweise von der Quarzglas G. m. b. H. W. C. Heraeus zur Verfügung gestellt worden waren und teils etwa zwei Jahre, teils einige Monate alt waren, außerdem eine größere Anzahl von nach dem bekannten Verfahren selbst geblasener Fäden, die unmittelbar nach der Herstellung gemessen wurden. Die Werte für die Fäden dieser verschiedenen Herkunft liegen innerhalb derselben Streugrenzen. Eine Verringerung des EM. von alten gegenüber neuen Fäden, wie sie z. B. bei der Zerreißfestigkeit beobachtet wird, ist also innerhalb der Meßgenauigkeit nicht festzustellen.

Darauf, daß der Dickeneffekt beim EM. tatsächlich besteht, weisen im übrigen verschiedene Gründe hin. Die Angaben für den EM. von Quarzglas in dicken Stücken schwanken zwischen 7130 und 4080 kg/mm², das Mittel der verschiedenen Werte ergibt 6140 kg/mm².[1]) Jurkov gibt für den EM. von Fäden einen konstanten Wert von etwa 9500 an, und zwar noch für solche von etwa 0,1 mm, also schon verhältnismäßig große Durchmesser. Es ist nicht sehr wahrscheinlich, daß der Übergang zu dem niedrigeren Werte bei den Dimensionen von einigen Zehnteln Millimeter oder mehr einsetzt; viel größere Wahrscheinlichkeit hat der von mir gefundene allmähliche Übergang von den hohen Werten der ganz dünnen Fäden zu dem niedrigeren des kompakten Materials. Weiterhin ist das Verhältnis der Kurve des EM. zu der des TM. zu berücksichtigen. Letztere zeigt eine analoge Abhängigkeit von der Fadendicke wie die von mir angegebene des EM. Es ist kaum anzunehmen, daß die beiden Elastizitätskonstanten ein prinzipiell voneinander verschiedenes Verhalten aufweisen sollten, was man nach dem Befund von Jurkov annehmen müßte. Denn die von ihm angenommene Fehlerquelle fällt bei der Messung des TM. fort, dessen Werte ich aus der Schwingungsdauer eines an dem zu untersuchenden Faden aufgehängten bekannten Trägheitsmomentes bestimmt habe. Besondere Versuche zeigten, daß der TM. innerhalb der hier in Frage kommenden Grenzen unabhängig von der Belastung ist. Dieselbe Feststellung hat früher schon Horton[1]) gemacht. Wenn also der TM. den Dickeneffekt zeigt, ist schon deshalb wohl anzunehmen, daß dies auch beim EM. der Fall ist, wie es meine Versuche auch bestätigen. Übrigens zeigen auch Messungen, bei denen der EM. aus Biegungsversuchen bestimmt wurde, das gleiche Ansteigen des EM. mit abnehmender Dicke des Fadens (II, S. 34). Ferner spricht gegen die von Jurkov vermutete Fehlerquelle, daß, wenn man ihre Einwirkung unter der Annahme der Richtigkeit eines konstanten EM. rechnerisch berücksichtigt und den allgemeinen Verlauf einer dadurch bedingten fehlerhaften Kurve berechnet, sich ergibt, daß dieser ein wesentlich anderer sein müßte als der von mir gefundene, nämlich in dem untersuchten Gebiet nach oben konkav und nicht konvex.

Die in der Figur wiedergegebenen, gegen die früheren erhöhten Werte des EM. ergeben in Kombination mit den Werten des TM. für den Poisson-Koeffizienten bei den stärksten untersuchten Fäden den Wert 0,22, während mit den früheren Zahlen des EM. für den Koeffizienten Null oder sogar negative Werte berechnet werden[2]). Die in der Literatur angegebenen Werte für den Poisson-Koeffizienten für kompaktes Quarzglas schwanken zwischen 0,26 und 0,09. Berechnet man aus den Werten des EM. und des TM., die einerseits in der Figur dieser Mitteilung, andererseits in der von II, S. 118, enthalten sind, den Koeffizienten für die Fäden der verschiedenen Durchmesser, so ergeben sich Zahlen, die von 0,22 bei 80 μ nach kleineren Durchmessern zu regelmäßig abfallen und sich dem Werte Null nähern. Allerdings ist infolge der verhältnismäßig großen Streuung der Einzelwerte der Elastiziätskonstanten dieses Ergebnis wohl noch mit Vorsicht aufzufassen.

Für die Durchführung der Messungen habe ich Herrn Dr. Stitz zu danken.

1) Zusammenstellung in R. B. Sosman, The Properties of Silica, S. 438. New York 1927.

1) F. Horton, Phil. Trans. R. S. London **204**, 407, 1905.

2) Vgl. hierzu F. Threlfall, Phil. Mag. **30**, 99, 1890, wo auch negative Werte für den Poisson-Koeffizienten auftreten.

Greifswald, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 1. April 1939)

Über eine die Glühkathodenstrahlemission begleitende Materiestrahlung

Von W. Reichelt

Die bekannte Erscheinung der Kathodenzerstäubung durch auftreffende positive Träger ist als lokal eng begrenzter Verdampfungsvorgang erkannt worden. Die aus der Kathode befreiten Teilchen sind neutrale Atome des Kathodenmetalls, welche dieses mit thermischen Geschwindigkeiten verlassen. Im Gebiet des Glimmlichts können die ursprünglich neutralen Atome dann „irgendeine Ladung" annehmen[1]).

Die Erscheinungen im einzelnen restlos zu klären und quantitativ zu erfassen, ist infolge der vielen Versuchsparameter wie Gasart und -druck, Kathodenfall, Kathodenmaterial, Stromstärke usw. den zahlreichen hierzu angestellten Beobachtungen bisher nicht gelungen. A. v. Hippel hat deshalb, um von den Schwierigkeiten der Glimmentladung unabhängig zu werden, in der genannten Arbeit schon Untersuchungen über den Zerstäubungsvorgang im Hochvakuum angekündigt, die aber unseres Wissens nicht durchgeführt oder veröffentlicht worden sind.

Wir sind unabhängig davon auf einem anderen Wege auf ein Zerstäubungsphänomen im Hochvakuum aufmerksam geworden. Bei Gelegenheit der Untersuchung der Streuung langsamer Kathodenstrahlen an bestimmten Metallen, die zur Beseitigung ihrer Gasokklusion ausgeheizt wurden, beobachtete Dr. W. Veith im Institut, daß die Auftreffstelle des Kathodenstrahls sich dadurch auf dem Metall abbildete, daß diese Stelle im Gegensatz zu ihrer unbestrahlten Umgebung unverdampft blieb und als merkliche Erhöhung kenntlich wurde.

Da dieses Ergebnis einer, wie es zunächst scheinen konnte, reinen Kathodenstrahlwirkung nicht von vornherein verständlich war, schien uns eine nähere Untersuchung angezeigt. Es stellte sich dabei heraus, daß die Kathodenstrahlen eines hell glühenden Wolframdrahtes im Hochvakuum der Diffusionspumpe von Materiestrahlen begleitet sind, die sich an der Auftreffstelle niederschlagen und die Verdampfung der Substanz an dieser Stelle verhindern. Es handelt sich hier um Wolframatome, die den Glühdraht infolge einfacher Verdampfung neutral verlassen und offenbar in dem den Draht unmittelbar umgebenden negativen Raumladungsgebiet eine negative Ladung erhalten und zusammen mit den Elektronen mit einer nahe gleichen Energie als Strahl weiterlaufen und wie diese mit Hilfe einer Elektronenlinse konzentriert werden können.

Als besonders empfindliches Nachweismittel für einen solchen Strahl hat sich Kadmium erwiesen. Setzt man eine reine Kadmiumschicht der Strahlung aus, so schlagen sich die Materieteilchen in feiner dichter Schicht nieder und schützen das darunter liegende Metall vor dem Verdampfen, während die Umgebung ersichtlich verdampft, wenn man die Kadmiumschicht während der Bestrahlung oder nachträglich im Vakuum bis nahe zum Schmelzpunkt erhitzt. Der durch die Bestrahlung verursachte Niederschlag kann deutlich auch auf einem in den Weg des Strahls gestellten Glasplättchen wahrgenommen werden. Man beobachtet dann einen stark reflektierenden dunkelbraunen Fleck, dessen Dichte mit der Dauer und Intensität der Bestrahlung zunimmt[1]). Es hat sich leider keine einfache Möglichkeit gezeigt, über die die Verdampfung verhindernde Dicke des Niederschlags nähere Kenntnis zu gewinnen, die für die Frage des Verdampfungsprozesses an metallischen Oberflächen allgemein von Bedeutung wäre.

Wir haben aber noch versucht, das Ergebnis der Bestrahlung dadurch zu reproduzieren, daß wir auf die Kadmiumschicht durch Kathodenzerstäubung durch eine enge Lochblende hindurch einen Platinfleck niederschlugen. Die nachträgliche Erhitzung im Vakuum ergab ebenfalls unverdampfte Stellen. Wenn sich diese allerdings meist auf die Peripherie des Flecks beschränkten, dessen Mitte noch verdampfte, so ist dies offenbar dadurch zu erklären, daß bei der Bestäubung durch die benutzte enge Blende die Randstellen bevorzugt getroffen werden, wie es auch die direkte Betrachtung der Flecke anzeigte. Die oben berührte allgemeine Frage würde wohl am ehesten durch fortgesetzte Versuche dieser Art zu behandeln sein.

Herrn Prof. Dr. A. Becker danke ich sehr für das dieser Untersuchung entgegengebrachte Interesse.

1) J. Stark, Zeitschr. f. Elektrochem. **14**, 752, 1908; **15**, 509, 1909. A. v. Hippel, Ann. d. Phys. **81**, 1074, 1926. Th. Baum, Zeitschr. f. Phys. **40**, 706, 1927.

1) Es ist von Interesse, festzustellen, daß der zur Strahlintensitätsmessung über das Glasplättchen und ein Galvanometer abgeleitete Strom erst kurze Zeit nach Beginn der Bestrahlung vom Galvanometer angezeigt wird.

Heidelberg, Philipp-Lenard-Institut der Universität.

(Eingegangen 27. März 1939)

Besprechungen

Sämtliche in diesem Heft besprochenen oder vom Verlag angezeigten Bücher sind in allen deutschen Buchhandlungen zu erhalten.

Kodak, Abridged Scientific Publications from the Kodak Research Laboratories. Band XIX, 1937. 288 Seiten mit zahlreichen Figuren. Rochester, New York 1938, Eastman Kodak Company.

Im 19. Band der gesammelten wissenschaftlichen Veröffentlichungen des amerikanischen Kodak-Konzerns sind wieder in anerkennenswerter Weise 40 Abhandlungen vereinigt, die in den verschiedensten europäischen und amerikanischen wissenschaftlichen Zeitschriften von dem hervorragenden Mitarbeiterstab dieser bekannten Firma auf fast sämtlichen photographischen Gebieten im Jahre 1937 veröffentlicht wurden.

Sie betreffen unter anderem zunächst die vielfältigen Fragen der Farbenphotographie und der Sensitometrie, weitere Artikel sind Beiträge zur photographischen Chemie und behandeln die Chemie photographischer Entwickler und neuartiger Sensibilisatoren; hierzu treten zahlreiche speziell-chemische Abhandlungen sowie Hinweise auf Anwendungsgebiete der wissenschaftlichen Photographie in anderen Zweigen der Wissenschaft.

Rzymkowski

Nachtrag zum Vorlesungsverzeichnis für das Sommerhalbjahr 1939

Technische Hochschule Berlin. **Geiger:** Experimentalphysik I, 4; Physikalische Übungen für Fortgeschrittene (mit Haxel), 8; Praktische Arbeiten im Physikalischen Institut, tägl. – **Westphal:** Physikalische Übungen, 4, für Physiker, 4, Ergänzungen, 2. – **Volz:** Theorie der Wärme, 3, Übungen, 2. – **Haxel:** Mechanik für Physiker II, 2, Übungen, 2. – **Kömmnick:** Ausgewählte Kapitel der technischen Physik, nach Vereinbarung; Physikalisch-technisches Praktikum, nach Vereinbarung; Experimentalballistik, nach Vereinbarung; Physikalisch-technische Forschungsarbeiten, Dipl.- und Doktorarbeiten, tägl. – **Becker:** Ausgewählte Kapitel der Wehrtechnik, 1. – **Picht:** Einführung in die Theorie der Atomphysik I: Theorien der Statistik und klassischen Atomphysik, 3, Übungen, 1. – **Schmidt:** Die physikalischen Grundlagen der selbsttätigen Regelung, 1; Die Messung hoher Temperaturen, 1. – **Hertz:** Anleitung zu selbständigen physikalischen Arbeiten, tägl. – **Ramsauer:** Physikalisch-technische Arbeiten, nach Vereinbarung. – **Schachenmeier:** Ausgewählte Probleme der theoretischen Physik, 1; Allgemeine Meßtechnik: Grundlagen und praktische Anwendungen, 2. – **Gehrts:** Wirkungsweise, Bau und Berechnung von Elektronenröhren I, 2; Fernsehen I, 2. – **Wallot:** Einheiten, Maßsysteme, Dimensionen, 1. – **Cauer:** Theorie der linearen Wechselstromschaltungen I: Netzwerke, 2, Übungen, nach Vereinbarung. – **Frerichs:** Besprechung ausgewählter Experimente zur Theorie der Thermodynamik, nach Vereinbarung. – **Engl:** Übersicht über die technischen Verfahren der Untersuchung des Grob- und Feinaufbaues der Festkörper, 1; Anleitung zu selbständigen physikalischen Arbeiten, tägl. – **Weidert:** Geometrische Optik I, 2, Übungen, 2 *g*; Seminar für optisches Rechnen I, 2; Theorie und Wirkungsweise der optischen Instrumente I, 2, Übungen, 4; Optische Laboratoriumsarbeiten für Fortgeschrittene, tägl.; Geometrische Optik für Geodäten, 2; Lichtkundliche Übungen: Lichttechnik, optische Instrumente, Photographie (mit Arndt und Stenger), 2; Optisches Kolloquium (mit Picht), $1^1/_2$. – **Jung:** Einführung in die Geophysik, Erdbeben, Aufbau und physikalischer Zustand des Erdinnern, 2; Geophysikalische Übungen im Gelände (mit Reich), nach Vereinbarung. – **Koschmieder:** Meteorologische Instrumente, 14tägig, $1^1/_2$.

Technische Hochschule Braunschweig. **Cario:** Experimentalphysik I: Elektrizität und Optik, 3, Ergänzungen, 1; Physikalisches Praktikum I und II, 3 und 6, für Pharmazeuten, 3; Physikalisches Kolloquium (mit Lübcke), 14tägig, 2 *g*; Selbständige Arbeiten auf dem Gebiete der Physik, tägl.; Seminar über Atomphysik, 2. – **Bergwitz:** Radioaktivität mit Anwendungen, 1; Physik der Röntgenstrahlen, 1; Radiologisches Praktikum, 1 Nachmittag. – **Hübner:** Temperaturbestimmung auf Grund von Strahlungsmessung, 1. – **Lübcke:** Akustik I: Mikrophon, Schallmessungen, Schallaufnahmen, 14tägig, 2; Akustische Meßmethoden I, 14tägig, 2; Ausgewählte Abschnitte der technischen Physik, 15tägig, 2; Physikalisch-technische Arbeiten im Laboratorium, nach Vereinbarung *g*. – **Stille:** Ausgewählte Kapitel aus der theoretischen Physik, kinetische Theorie der Materie, 2, Übungen, 1. – **Völl:** Praktische Übungen in Gas- und Luftschutz, nach Vereinbarung.

Nachrichten

VDI. Kältetagung am 22. und 23. Mai 1939 in Dresden. Tagesbüro im Zeunerbau der Technischen Hochschule Georg-Bähr-Straße 3c, Hörsaal 35 A. Programm bei der Geschäftsstelle der Arbeitsgemeinschaft Kältetechnik des VDI. Berlin NW 7, Hermann-Göring-Straße 27.

Dozenturen: Dr. Othmar Baier an der Technischen Hochschule Stuttgart für darstellende und projektive Geometrie sowie Differentialgeometrie.

Ernannt: Dr. habil. Walter Grundmann zum a. o. Professor für meteorologische Meßtechnik an der Technischen Hochschule Braunschweig, der Lehrbeauftragte an der Universität Münster Dr. Josef Deiters zum Honorarprofessor für Kraftfahrtwesen und Luftfahrtwesen an der gleichen Hochschule, der ord. Professor der Physik an der Universität Gießen Dr. Christian Gerthsen in gleicher Eigenschaft an der Universität Berlin.

Vom Amte zurück: Der Präsident der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt Professor Dr. Johannes Stark, der ord. Professor für technische Optik und Feinmechanik an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Christian von Hofe, der ord. Professor für allgemeine und analytische Mechanik an der Technischen Hochschule Wien Dr. Franz Jung, der ord. Professor für Physik an der Universität Wien Dr. Egon Schweidler.

Gestorben: Der a. o. Professor der chemischen Technologie an der Technischen Hochschule Berlin und Betriebsführer der Deutschen Hydronwerke Dr. Walter Schrauth.

Verantwortlicher Schriftleiter: Professor Dr. Dr. h. c. P. Debye, Berlin. – Für den Anzeigenteil verantwortlich: A. Plohmann, Leipzig. – Verlag S. Hirzel, Leipzig C 1, Königstr. 2. – Druck: Bibliographisches Institut AG., Leipzig. – D. A. 1330, I. Vj. 1939. – Zur Zeit gilt Anzeigenpreisliste 3. – Printed in Germany.